

VĂN NHƯ CUONG (Chủ biên)  
PHẠM KHẮC BAN - TẠ MÂN

# BÀI TẬP HÌNH HỌC

NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ chín)

II

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

---

01 - 2016/CXBIPH/806 - 964/GD

Mã số : NB104n6

## *Lời nói đầu*

---

Đây là cuốn sách bài tập dùng cho học sinh học theo chương trình Toán nâng cao lớp 11.

Các bài tập trong sách được sắp xếp theo các chương, mục của sách giáo khoa (SGK) Hình học 11 nâng cao.

Phần lớn các bài tập trong sách nhằm củng cố kiến thức và rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh theo mục tiêu của chương trình và SGK Hình học 11 nâng cao ; những bài tập này tương tự như các bài tập trong SGK. Vì vậy, học sinh làm được các bài tập đó sẽ có định hướng để giải các bài tập trong SGK. Ngoài ra, còn có một số bài tập dành cho học sinh khá, giỏi.

Cuối mỗi chương có các bài tập trắc nghiệm. Mỗi bài có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Nhiệm vụ của học sinh là tìm ra phương án đúng đó.

Các tác giả chân thành cảm ơn nhóm biên tập của ban Toán - Tin, Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã giúp đỡ rất nhiều để hoàn thiện cuốn sách này.

*Các tác giả*



### A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

#### §1, §2. Mở đầu về phép biến hình. Phép tịnh tiến và phép dời hình

##### I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm  $M$  trên mặt phẳng có thể xác định được một điểm duy nhất  $M'$  thuộc mặt phẳng.
2. Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$  là phép biến hình biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overline{MM'} = \vec{u}$ .
3. Tính chất cơ bản của phép tịnh tiến : Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
4. Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Phép tịnh tiến là một phép dời hình.
5. Phép dời hình có các tính chất : Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tia thành tia, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.
6. Cho hai phép dời hình  $F$  và  $G$ , giả sử  $M$  là điểm bất kì, phép biến hình  $F$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  và phép biến hình  $G$  biến điểm  $M'$  thành điểm  $M''$ . Khi đó phép biến hình biến điểm  $M$  thành điểm  $M''$  được gọi là hợp thành của phép  $F$  và phép  $G$ .

##### II - ĐỀ BÀI

1. Chứng minh rằng phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó.

2. Cho bốn đường thẳng  $a, b, a', b'$  trong đó  $a$  cắt  $b$ ,  $a \parallel a'$  và  $b \parallel b'$ . Tìm phép tịnh tiến biến  $a$  thành  $a'$  và biến  $b$  thành  $b'$ .
3. Cho đường tròn  $(O)$  với đường kính  $AB$  cố định, một đường kính  $MN$  thay đổi. Các đường thẳng  $AM$  và  $AN$  cắt tiếp tuyến tại  $B$  lần lượt tại  $P$  và  $Q$ . Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác  $MPQ$  và  $NPQ$ .
4. Cho hai đường tròn không đồng tâm  $(O; R)$  và  $(O_1; R_1)$  và một điểm  $A$  trên  $(O; R)$ . Xác định điểm  $M$  trên  $(O; R)$  và điểm  $N$  trên  $(O_1; R_1)$  sao cho  $\overline{MN} = \overline{OA}$ .
5. Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ , trong đó  $AD = R$ . Dựng các hình bình hành  $DABM$  và  $DACN$ . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DNM$  nằm trên  $(O; R)$ .
6. Cho hai phép tịnh tiến  $T$  và  $T'$  theo hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ . Với điều kiện nào của  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  thì hợp thành của  $T$  và  $T'$  là phép đồng nhất.
7. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho phép tịnh tiến  $T$  theo vectơ  $\vec{u}(1; -2)$ .
  - a) Viết phương trình ảnh của mỗi đường thẳng sau đây qua phép tịnh tiến  $T$ .
    - i) Đường thẳng  $a$  có phương trình  $3x - 5y + 1 = 0$ ;
    - ii) Đường thẳng  $b$  có phương trình  $2x + y + 100 = 0$ .
  - b) Viết phương trình ảnh của đường tròn  $x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = 0$  qua phép tịnh tiến  $T$ .
8. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  lần lượt có phương trình  $Ax + By + C = 0$  và  $Ax + By + C' = 0$ . Tìm những vectơ  $\vec{u}(a; b)$  sao cho phép tịnh tiến  $T$  theo vectơ đó biến  $d$  thành  $d'$ .
9. Cho ba điểm không thẳng hàng  $A, B, C$ . Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm  $A, B, C$  thành chính nó phải là phép đồng nhất.
10. Chứng tỏ rằng hợp thành của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.
11. Chứng minh rằng phép dời hình biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song mà khoảng cách giữa hai đường thẳng song song đã cho bằng khoảng cách giữa các ảnh của chúng.
12. Cho hai tam giác bằng nhau  $ABC$  và  $A'B'C'$  ( $AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$ ). Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$ .



13. Giả sử phép dời hình  $F$  biến điểm  $I$  đã cho thành chính nó và biến mỗi điểm  $M$  khác  $I$  thành điểm  $M'$  không trùng với  $M$ .
- a) Tìm những đường tròn biến thành chính nó qua phép dời hình  $F$ .
- b) Chứng tỏ rằng nếu đường thẳng  $a$  không đi qua  $I$  thì  $F$  biến  $a$  thành đường thẳng  $a'$  không trùng với  $a$ .
14. Cho đường thẳng  $a$  và một điểm  $I$  nằm trên nó. Gọi  $F$  là phép dời hình biến  $a$  thành  $a$  và  $I$  là điểm duy nhất biến thành chính nó. Chứng minh rằng  $F$  biến điểm  $M$  bất kì thành điểm  $M'$  sao cho  $I$  là trung điểm  $MM'$ .
15. Chứng minh rằng nếu phép dời hình  $F$  biến mỗi đường thẳng  $a$  thành đường thẳng  $a'$  vuông góc với  $a$  thì có một điểm duy nhất biến thành chính nó qua phép  $F$ .
16. Có hay không một phép dời hình  $F$  sao cho mọi đường thẳng đều biến thành đường thẳng song song với nó?
17. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho phép biến hình  $F$  biến mỗi điểm  $M(x; y)$  thành điểm  $M'(x'; y')$  sao cho

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

trong đó  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ ;  $ab + cd = 0$ .

Chứng tỏ rằng  $F$  là phép dời hình.

### §3. Phép đối xứng trục

#### I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép đối xứng qua đường thẳng  $a$  là phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua đường thẳng  $a$ .

Phép đối xứng qua đường thẳng  $a$  còn gọi là phép đối xứng trục. Đường thẳng  $a$  gọi là trục của phép đối xứng.

2. Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

3. Trục đối xứng của hình  $\mathcal{H}$  là đường thẳng mà phép đối xứng qua đường thẳng đó biến hình  $\mathcal{H}$  thành hình  $\mathcal{H}$ .

## II - ĐỀ BÀI

18. Cho hai điểm phân biệt  $A, B$  và phép dời hình  $F$  khác với phép đồng nhất sao cho  $F(A) = A, F(B) = B$ . Chứng minh rằng :
- Nếu điểm  $M$  nằm trên đường thẳng  $AB$  thì  $F(M) = M$  ;
  - $F$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $AB$ .
19. Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt. Có những phép dời hình nào biến  $A$  thành  $A$  và biến  $B$  thành  $B$ .
20. Chứng minh rằng :
- Hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.
  - Mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song bằng nhiều cách.
  - Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.
  - Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép đối xứng trục.
  - Cho phép đối xứng trục  $D_a$  qua đường thẳng  $a$  và phép tịnh tiến  $T$  theo vectơ  $\vec{v}$  vuông góc với  $a$ . Chứng tỏ rằng hợp thành của  $D_a$  và  $T$  là phép đối xứng trục, hợp thành của  $T$  và  $D_a$  cũng là phép đối xứng trục.
21. Cho hai đoạn thẳng bằng nhau  $AB = A'B'$ . Chứng minh rằng có thể tìm được một phép đối xứng trục hoặc hợp thành của hai phép đối xứng trục để biến  $A$  thành  $A'$ , biến  $B$  thành  $B'$ .
22. Cho hai tam giác bằng nhau  $ABC$  và  $A'B'C'$  ( $AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$ ). Chứng minh rằng chỉ cần tối đa ba phép đối xứng trục để hợp thành của chúng biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$ .
23. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(\mathcal{C})$  lần lượt có phương trình :
- $$d : Ax + By + C = 0 ;$$
- $$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$
- Viết phương trình ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là  $Ox$ .
  - Viết phương trình ảnh của đường tròn  $(\mathcal{C})$  qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là  $Oy$ .



- c) Viết phương trình ảnh của đường tròn  $(C)$  qua phép đối xứng trục có trục là đường thẳng  $bx - ay = 0$ .
24. Gọi  $m$  là đường phân giác ngoài tại  $A$  của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$  trên  $m$ , chu vi của tam giác  $MBC$  không nhỏ hơn chu vi tam giác  $ABC$ .
25. Cho elip  $(E)$  với hai tiêu điểm  $F_1$  và  $F_2$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên  $(E)$  nhưng không nằm trên đường thẳng  $F_1F_2$  và  $m$  là phân giác ngoài tại đỉnh  $M$  của tam giác  $MF_1F_2$ . Chứng minh rằng  $m$  chỉ cắt  $(E)$  tại điểm  $M$  duy nhất (đường thẳng  $m$  như thế được gọi là *tiếp tuyến* của  $(E)$  tại điểm  $M$ ).
26. Cho hypebôl  $(H)$  với hai tiêu điểm  $F_1$  và  $F_2$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên  $(H)$  nhưng không nằm trên đường thẳng  $F_1F_2$  và  $m$  là phân giác trong tại đỉnh  $M$  của tam giác  $MF_1F_2$ . Chứng minh rằng  $m$  chỉ cắt  $(H)$  tại điểm  $M$  duy nhất. (Đường thẳng  $m$  như thế được gọi là *tiếp tuyến* của  $(H)$  tại điểm  $M$ ).
27. Cho parabol  $(P)$  có tiêu điểm  $F$  và đường chuẩn  $d$ . Với điểm  $M$  trên  $(P)$  ta kẻ  $MH \perp d$  ( $H \in d$ ) và gọi  $m$  là phân giác của góc  $FMH$ . Chứng minh rằng  $m$  chỉ cắt  $(P)$  tại điểm chung duy nhất  $M$ . (Đường thẳng  $m$  như thế được gọi là *tiếp tuyến* của  $(P)$  tại điểm  $M$ ).
28. Cho tam giác  $ABC$  với  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp và  $P$  là một điểm nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  là các điểm đối xứng với điểm  $P$  lần lượt qua các đường thẳng  $AI, BI, CI$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $AA', BB', CC'$  đồng quy.
29. Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong góc  $A$ , góc  $B$  và góc  $C$ . Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua  $A'$  vuông góc với  $BC$ , qua  $B'$  vuông góc với  $AC$ , qua  $C'$  vuông góc với  $AB$  đồng quy.

## §4. Phép quay và phép đối xứng tâm

### I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Trong mặt phẳng, cho điểm  $O$  và góc lượng giác  $\varphi$ . Phép quay  $Q_{(O, \varphi)}$  tâm  $O$  góc quay  $\varphi$  là phép biến hình biến điểm  $O$  thành chính nó và biến mỗi điểm  $M$  khác  $O$  thành điểm  $M'$  sao cho  $OM = OM'$  và  $(OM, OM') = \varphi$ .

2. Phép quay là một phép dời hình.

3. Khi  $\varphi = \pi$  thì phép quay  $Q_{(O, \pi)}$  gọi là phép đối xứng qua điểm  $O$ , và kí hiệu là  $D_O$ . Phép đối xứng qua điểm  $O$  còn gọi là phép đối xứng tâm.

4. Phép đối xứng qua điểm  $O$  biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$ .

## II - ĐỀ BÀI

30. Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt. Chứng minh rằng nếu phép dời hình  $F$  biến  $A$  thành  $B$  và biến  $B$  thành  $A$  thì  $F$  là phép đối xứng trục hoặc phép đối xứng tâm.

31. Chứng minh rằng hợp thành của một số phép quay với các tâm quay trùng nhau là một phép quay.

32. Chứng minh rằng :

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay.

b) Mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau, bằng nhiều cách.

c) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trục có các trục đối xứng đồng quy là một phép quay.

d) Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng trục có các trục đối xứng đồng quy là một phép đối xứng trục.

33. Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $I$  không nằm trên đường tròn. Với mỗi điểm  $A$  thay đổi trên đường tròn, ta xét hình vuông  $ABCD$  có tâm là  $I$ . Tìm quỹ tích các điểm  $B, C, D$ .

34. Cho đường thẳng  $a$  và một điểm  $G$  không nằm trên  $a$ . Với mỗi điểm  $A$  nằm trên  $a$  ta dựng tam giác đều  $ABC$  có tâm là  $G$ . Tìm quỹ tích hai điểm  $B$  và  $C$  khi  $A$  chạy trên  $a$ .

35. Cho đường tròn  $(O)$  và tam giác  $ABC$ . Một điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M_1$  là điểm đối xứng của  $M$  qua  $A$ ,  $M_2$  là điểm đối xứng của  $M_1$  qua  $B$ ,  $M_3$  là điểm đối xứng của  $M_2$  qua  $C$ . Tìm quỹ tích của điểm  $M_3$ .

36. Cho hai đường thẳng  $a, b$  phân biệt và điểm  $C$  không nằm trên chúng. Hãy xác định hai điểm  $A, B$  lần lượt nằm trên  $a$  và  $b$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

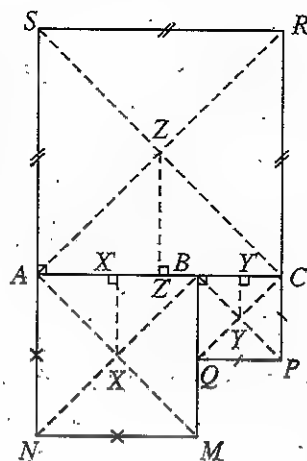
37. Cho hình vuông  $ABCD$  và một điểm  $M$  nằm trên một cạnh của hình vuông. Tìm các điểm  $N, P$  nằm trên cạnh của hình vuông sao cho tam giác  $MNP$  là tam giác đều.
38. Cho tam giác đều  $ABC$  với  $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$ . Hãy kể ra các phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành chính nó.
39. Cho tam giác đều  $ABC$  với  $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$ . Gọi  $Q_A, Q_B$  là các phép quay góc  $60^\circ$  lần lượt có tâm là  $A$  và  $B$ . Gọi  $F$  là hợp thành của  $Q_B$  và  $Q_A$ .
- Phép  $F$  biến các điểm  $A, B, C$  thành các điểm nào ?
  - Phép  $F$  là phép gì ?
  - Phép hợp thành của  $Q_A$  và  $Q_B$  là phép gì ?
40. Cho tam giác đều  $ABC$  với  $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$ . Gọi  $D_{AB}, D_{BC}$  và  $D_{AC}$  là các phép đối xứng lần lượt qua các đường thẳng  $AB, BC, AC$ .
- Hợp thành của  $D_{BC}$  và  $D_{AB}$  là phép gì ?
  - Hợp thành của  $D_{AB}$  và  $D_{AC}$  là phép gì ?
  - Gọi  $Q_A$  và  $Q_B$  là các phép quay góc  $120^\circ$  với tâm lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Hợp thành của  $Q_B$  và  $Q_A$  là phép gì ?
41. Hãy chỉ ra tất cả các phép dời hình biến hình vuông  $ABCD$  thành chính nó.
42. Cho hai phép quay  $Q_A$  và  $Q_B$  có tâm quay là  $A$  và  $B$  (phân biệt) và có cùng góc quay  $90^\circ$ . Gọi  $F$  là hợp thành của  $Q_A$  và  $Q_B$ ,  $F'$  là hợp thành của  $Q_B$  và  $Q_A$ . Hãy chứng tỏ rằng  $F$  và  $F'$  là những phép đối xứng tâm và nêu rõ cách xác định tâm đối xứng của các phép đó.
43. Về phía ngoài của tam giác  $ABC$  vẽ các hình vuông  $BCM N$  và  $ACPQ$  có tâm  $O$  và  $O'$ .
- Chứng minh rằng khi cố định hai điểm  $A, B$  và cho điểm  $C$  thay đổi thì đường thẳng  $NO$  luôn luôn đi qua một điểm cố định.
  - Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ . Chứng minh rằng  $IOO'$  là tam giác vuông cân.
44. Về phía ngoài của hình bình hành  $ABCD$  dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh rằng bốn tâm của bốn hình vuông đó là đỉnh của một hình vuông.

45. Về phía ngoài của tứ giác lồi  $ABCD$  dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh rằng tâm của bốn hình vuông đó làm thành một tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

46. Trên hình 1 có ba điểm thẳng hàng  $A, B, C$  và ba hình vuông  $ABMN, BCPQ, ACRS$  với tâm lần lượt là  $X, Y, Z$ . Gọi  $X', Y', Z'$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AB, BC, AC$ .

a) Chứng minh rằng các tam giác  $Z'XY, XYZ, Y'XZ$  là những tam giác vuông cân.

b) Chứng minh rằng hai đoạn thẳng  $AY, XZ$  bằng nhau và vuông góc với nhau, cũng như thế đối với hai đoạn thẳng  $BZ, XY$  và  $CX, YZ$ .



Hình 1.

## §5. Hai hình bằng nhau

### I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nếu  $ABC$  và  $A'B'C'$  là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia.

2. Hai hình  $\mathcal{H}$  và  $\mathcal{H}'$  gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

### II - ĐỀ BÀI

47. Cho hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  với đường cao lần lượt là  $AH$  và  $A'H'$ . Trong mỗi trường hợp dưới đây, hai tam giác đó có bằng nhau hay không?

a)  $AH = A'H', AB = A'B', AC = A'C'$ ;

b)  $AH = A'H', AB = A'B', AC = A'C'$ , các góc  $A$  và  $A'$  đều là góc tù.

48. Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $D$ , hình thang  $A'B'C'D'$  vuông tại  $A'$  và  $D'$ . Chứng minh rằng hai hình thang ấy bằng nhau nếu  $AB = A'B', BC = B'C'$  và  $CD = C'D'$ .

49. Chứng minh rằng hai tam giác bằng nhau nếu có các đường tròn nội tiếp bằng nhau, một cặp đường tròn bàng tiếp bằng nhau, đồng thời khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của hai tam giác đó cũng bằng nhau.

50. Chứng minh rằng hai tam giác vuông bằng nhau nếu có các cạnh huyền bằng nhau và đường cao ứng với cạnh huyền bằng nhau.
51. Chứng minh rằng nếu ba trung tuyến của tam giác  $ABC$  lần lượt bằng ba trung tuyến của tam giác  $A'B'C'$  thì hai tam giác đó bằng nhau.
52. Cho hình  $\mathcal{H}$  gồm ba đường tròn có tâm tại  $A, B, C$  đôi một tiếp xúc ngoài với nhau và hình  $\mathcal{H}'$  gồm ba đường tròn có tâm tại  $A', B', C'$  đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng minh rằng nếu tam giác  $ABC$  bằng tam giác  $A'B'C'$  thì hình  $\mathcal{H}$  bằng hình  $\mathcal{H}'$ .

## §6, §7. Phép vị tự. Phép đồng dạng

### I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép vị tự  $V_{(O, k)}$  với tâm  $O$  và tỉ số  $k$  ( $k \neq 0$ ) là phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ .
2. Phép vị tự tỉ số  $k$  biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với  $|k|$ , biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là  $|k|$ , biến góc thành góc bằng nó.
3. Phép vị tự biến đường tròn có bán kính  $R$  thành đường tròn có bán kính  $|k|R$ .
4. Tâm vị tự của hai đường tròn : đó là tâm của phép vị tự  $V$  biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự ngoài hay tâm vị tự trong tùy theo tỉ số của phép vị tự  $V$  là dương hay âm.  
Hai đường tròn có bán kính khác nhau thì có một tâm vị tự ngoài và một tâm vị tự trong. Hai đường tròn có bán kính bằng nhau (tâm khác nhau) thì chỉ có tâm vị tự trong, đó chính là trung điểm đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn.
5. Phép đồng dạng tỉ số  $k$  ( $k > 0$ ) là phép biến hình biến hai điểm tùy ý  $M, N$  thành hai điểm  $M', N'$  sao cho  $M'N' = kMN$ .
6. Mọi phép đồng dạng  $F$  tỉ số  $k$  là hợp thành của một phép vị tự  $V$  tỉ số  $k$  và một phép dời hình  $D$ .
7. Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.



## II - ĐỀ BÀI

53. Cho hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  không bằng nhau nhưng có các cạnh tương ứng song song :  $AB \parallel A'B'$ ,  $BC \parallel B'C'$  và  $CA \parallel C'A'$ . Chứng minh rằng cố phép vị tự biến tam giác này thành tam giác kia.
54. Cho hai phép vị tự  $V_1$  có tâm  $O_1$  tỉ số  $k_1$  và  $V_2$  có tâm  $O_2$  tỉ số  $k_2$ . Gọi  $F$  là hợp thành của  $V_1$  và  $V_2$ . Chứng minh rằng :
- $F$  là một phép tịnh tiến nếu  $k_1 k_2 = 1$ . Hãy xác định vectơ tịnh tiến.
  - $F$  là một phép vị tự nếu  $k_1 k_2 \neq 1$ . Hãy xác định tâm và tỉ số của phép vị tự đó.
55. Cho ba đường tròn  $(I_1; R_1)$ ,  $(I_2; R_2)$ ,  $(I_3; R_3)$  không đồng tâm và không bằng nhau. Gọi  $O_3^+$  và  $O_3^-$  lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn  $(I_1; R_1)$  và  $(I_2; R_2)$ ;  $O_1^+$  và  $O_1^-$  lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn  $(I_2; R_2)$  và  $(I_3; R_3)$ ;  $O_2^+$  và  $O_2^-$  lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn  $(I_3; R_3)$  và  $(I_1; R_1)$ . Chứng minh rằng mỗi bộ ba điểm sau đây thẳng hàng :
- $$O_1^+, O_2^+, O_3^+; O_1^+, O_2^-, O_3^-; O_1^-, O_2^+, O_3^- \text{ và } O_1^-, O_2^-, O_3^+.$$
56. Cho hai đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  ngoài nhau và không bằng nhau. Một đường tròn  $(O)$  thay đổi tiếp xúc ngoài với  $(O_1)$  và  $(O_2)$ . Gọi các tiếp điểm tương ứng là  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AB$  luôn luôn đi qua một điểm cố định. Nếu thay giả thiết "tiếp xúc ngoài" bằng "tiếp xúc trong" thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?
57. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Một đường thẳng thay đổi đi qua  $A$  cắt  $(O)$  ở  $A$  và  $M$ , cắt  $(O')$  tại  $A$  và  $M'$ . Gọi  $P$  và  $P'$  lần lượt là trung điểm của  $AM$  và  $AM'$ .
- Tìm quỹ tích trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $PP'$ .
  - Tìm quỹ tích trung điểm  $J$  của đoạn thẳng  $MM'$ .
58. Cho ba đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$ ,  $(O_3)$  đôi một tiếp xúc ngoài với nhau,  $A$  là tiếp điểm của  $(O_1)$  và  $(O_2)$ ;  $B$  là tiếp điểm của  $(O_2)$  và  $(O_3)$ ;  $C$  là tiếp điểm của  $(O_3)$  và  $(O_1)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt  $(O_3)$  tại điểm thứ hai  $B'$ , đường thẳng  $AC$  cắt  $(O_3)$  tại điểm thứ hai  $C'$ . Chứng minh  $B'C'$  là đường kính của  $(O_3)$ .

59. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các cạnh tương ứng tỉ lệ thì có phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia.
60. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và đường cao  $AD$ . Gọi  $V$  là phép vị tự tâm  $D$  tỉ số  $k = \frac{DA}{DB}$  và  $Q$  là phép quay tâm  $D$  góc quay  $\varphi = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$ ,  $F$  là hợp thành của  $V$  và  $Q$ .
- a) Phép  $F$  biến tam giác  $ABD$  thành tam giác nào ?
- b) Lấy hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt nằm trên hai cạnh  $BA$  và  $AC$  sao cho

$$\frac{BM}{MA} = \frac{AN}{NC}$$

Chứng minh rằng  $DMN$  là tam giác vuông.

61. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và đường cao  $AD$ . Gọi  $c$  là phân giác của góc  $C$ ,  $D_c$  là phép đối xứng qua  $c$ ,  $V$  là phép vị tự tâm  $C$  tỉ số  $k = \frac{CA}{CB}$  và  $F$  là hợp thành của  $D_c$  và  $V$ .
- a)  $F$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác nào ?
- b) Lấy hai điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng  $AB$  và  $DA$  sao cho

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NA}$$

Chứng minh rằng  $c$  là phân giác của góc  $MCN$ .

62. Dựng tam giác  $ABC$  biết góc  $A$  bằng  $\alpha$ , tỉ số  $\frac{AB}{AC} = k$  và chu vi tam giác bằng  $m$ .
63. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các đường cao tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.



## Bài tập ôn tập chương I

64. Cho hai điểm  $A$  và  $A'$  đối xứng với nhau qua điểm  $I$ ,  $F$  là phép dời hình biến  $I$  thành  $I$ , biến  $A$  thành  $A'$ . Chứng minh rằng  $F$  là phép đối xứng tâm hoặc phép đối xứng trục.
65. Cho phép dời hình  $F$  không phải là phép đồng nhất. Chứng minh rằng nếu  $F$  biến điểm  $I$  nào đó thành chính nó thì  $F$  là phép quay tâm  $I$  hoặc là phép đối xứng có trục là đường thẳng đi qua  $I$ .

66. Cho đường tròn  $(O)$  và phép dời hình  $F$  biến  $(O)$  thành chính nó nhưng  $F$  không phải là phép đồng nhất. Gọi  $M$  là điểm thay đổi trên đường tròn và  $M' = F(M)$ . Chứng minh rằng quỹ tích của trung điểm đoạn thẳng  $MM'$  là một đường tròn, hoặc là một đoạn thẳng, hoặc là một điểm.
67. Cho  $D$  là phép đối xứng trục có trục đối xứng là đường thẳng  $d$  và  $T$  là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$  song song với  $d$ . Hợp thành của  $D$  và  $T$  gọi là *phép đối xứng trượt*. Đường thẳng  $d$  gọi là *trục* của phép đối xứng trượt, vector  $\vec{v}$  gọi là *vector trượt*. Phép đối xứng trục là một trường hợp đặc biệt của phép đối xứng trượt khi vector trượt là vector-không.
- Chứng minh rằng hợp thành của  $T$  và  $D$  cũng bằng hợp thành của  $D$  và  $T$ .
  - Chứng minh rằng nếu  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép đối xứng trượt thì trung điểm đoạn thẳng  $MM'$  luôn nằm trên trục của phép đối xứng trượt đó.
  - Hợp thành của hai phép đối xứng trượt có trục song song là phép gì?
  - Chứng minh rằng hợp thành của một phép đối xứng trục và một phép tịnh tiến là một phép đối xứng trượt.
  - Chứng minh rằng hợp thành của một phép quay và một phép đối xứng trục là một phép đối xứng trượt.
  - Chứng minh rằng hợp thành của ba phép đối xứng trục là một phép đối xứng trượt.
68. Cho hai đoạn thẳng bằng nhau  $AB$  và  $A'B'$  ( $AB = A'B'$ ). Chứng minh rằng có một phép đối xứng trượt biến  $A$  thành  $A'$ , biến  $B$  thành  $B'$ .
69. Cho hai đường thẳng phân biệt  $a, a'$  và phép dời hình  $F$  biến  $a$  thành  $a'$ . Một điểm  $M$  thay đổi trên  $a$  và  $M' = F(M)$ . Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng  $MM'$  hoặc trùng nhau, hoặc nằm trên một đường thẳng.
70. Cho hai đường tròn có bán kính bằng nhau  $(O)$  và  $(O')$ . Trên  $(O)$  lấy hai bán kính vuông góc  $OA, OB$  và trên  $(O')$  lấy hai bán kính vuông góc  $O'A', O'B'$  sao cho  $A, A'$  nằm trên đường thẳng  $OO'$  và hai vector  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{O'A'}$  cùng hướng, còn hai vector  $\overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{O'B'}$  ngược hướng.
- Chứng minh rằng có phép dời hình  $F$  biến đường tròn  $(O)$  thành  $(O')$  sao cho hai điểm  $A, B$  lần lượt biến thành hai điểm  $A', B'$ .
  - Với mỗi điểm  $M$  nằm trên  $(O)$  và ảnh  $M'$  của nó qua phép dời hình  $F$ , chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng  $MM'$  nằm trên một đường thẳng cố định.
71. Cho phép vị tự  $V$  tâm  $O$ , tỉ số  $k \neq 1$  và phép tịnh tiến  $T$  theo vector  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Gọi  $F$  là phép hợp thành của  $V$  và  $T$ .

a) Tìm điểm  $I$  sao cho  $F$  biến  $I$  thành chính nó.

b) Chứng minh rằng  $F$  là phép vị tự tâm  $I$  tỉ số  $k$ .

72. Cho đường tròn  $(O)$  với dây cung  $PQ$ . Dụng hình vuông  $ABCD$  có hai đỉnh  $A, B$  nằm trên đường thẳng  $PQ$  và hai đỉnh  $C, D$  nằm trên đường tròn.

73. Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $P$  nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua  $P$ , cắt  $(O)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ .

74. Cho điểm  $A$  cố định nằm trên đường tròn  $(O)$  và điểm  $C$  thay đổi trên đường tròn đó. Dụng hình vuông  $ABCD$ . Tìm quỹ tích điểm  $B$  và điểm  $D$ .

### Bài tập trắc nghiệm chương I

1. Cho đường thẳng  $a$  cắt hai đường thẳng song song  $b$  và  $b'$ . Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng  $a$  thành chính nó và biến đường thẳng  $b$  thành đường thẳng  $b'$ ?

(A) Không có phép nào;

(B) Có một phép duy nhất;

(C) Chỉ có hai phép;

(D) Có vô số phép.

2. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng  $AB$  thành đường thẳng  $CD$  và biến đường thẳng  $AD$  thành đường thẳng  $BC$ ?

(A) Không có phép nào;

(B) Có một phép duy nhất;

(C) Chỉ có hai phép;

(D) Có vô số phép.

3. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  thành chính nó?

(A) Không có phép nào;

(B) Có một phép duy nhất;

(C) Chỉ có hai phép;

(D) Có vô số phép.

4. Cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cắt nhau và góc giữa chúng bằng  $60^\circ$ . Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến  $a$  thành  $a$  và biến  $b$  thành  $b$ ?

(A) Không có phép nào;

(B) Có một phép duy nhất;

(C) Chỉ có hai phép;

(D) Có vô số phép.

5. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau  $a$  và  $b$ . Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến  $a$  thành  $a$  và biến  $b$  thành  $b$ ?

(A) Không có phép nào;

(B) Có một phép duy nhất;

(C) Chỉ có hai phép;

(D) Có vô số phép.

6. Đồ thị của hàm số  $y = \cos x$  có bao nhiêu trục đối xứng?

(A) Không có trục đối xứng;

(B) Có một trục đối xứng duy nhất;

(C) Chỉ có hai trục đối xứng;

(D) Có vô số trục đối xứng.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?  
 (A) Tam giác có trục đối xứng ; (B) Tứ giác có trục đối xứng ;  
 (C) Hình thang có trục đối xứng ; (D) Hình thang cân có trục đối xứng.
8. Trong các hình dưới đây hình nào có ba trục đối xứng ?  
 (A) Đoạn thẳng ; (B) Đường tròn ;  
 (C) Tam giác đều ; (D) Hình vuông.
9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?  
 (A) Tam giác đều có tâm đối xứng ; (B) Tứ giác có tâm đối xứng ;  
 (C) Hình thang cân có tâm đối xứng ; (D) Hình bình hành có tâm đối xứng.
10. Cho hai đường thẳng bất kì  $d$  và  $d'$ . Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$  ?  
 (A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;  
 (C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.
11. Cho tam giác đều  $ABC$  với  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Với giá trị nào dưới đây của  $\varphi$  thì phép quay  $Q_{(O, \varphi)}$  biến tam giác đều  $ABC$  thành chính nó ?  
 (A)  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  ; (B)  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  ;  
 (C)  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  ; (D)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .
12. Trong các phép sau đây, phép nào có tính chất : *Biến mỗi đường thẳng  $a$  thành đường thẳng  $a'$  không song song với  $a$  ?*  
 (A) Phép tịnh tiến ; (B) Phép đối xứng trục ;  
 (C) Phép đối xứng tâm ; (D) Phép quay với góc quay  $\frac{\pi}{2}$ .
13. Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục song song là phép nào trong các phép sau đây ?  
 (A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép đối xứng tâm ;  
 (C) Phép quay ; (D) Phép tịnh tiến.
14. Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là phép nào trong các phép sau đây ?  
 (A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép quay ;  
 (C) Phép tịnh tiến ; (D) Phép đồng nhất.



15. Hợp thành của hai phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép sau đây ?  
 (A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép đối xứng tâm ;  
 (C) Phép quay ; (D) Phép tịnh tiến.
16. Hợp thành của một phép tịnh tiến và phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép sau đây ?  
 (A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép đối xứng tâm ;  
 (C) Phép đồng nhất ; (D) Phép tịnh tiến.
17. Cho hai đường thẳng song song  $d$  và  $d'$ . Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số  $k = 20$  biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$  ?  
 (A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;  
 (C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.
18. Cho hai đường thẳng cắt nhau  $d$  và  $d'$ . Có bao nhiêu phép vị tự biến  $d$  thành  $d'$  ?  
 (A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;  
 (C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.
19. Cho hai đường thẳng song song  $d$  và  $d'$  và một điểm  $O$  không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm  $O$  biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$  ?  
 (A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;  
 (C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.
20. Cho hai đường tròn bằng nhau  $(O ; R)$  và  $(O' ; R)$  với tâm  $O$  và  $O'$  phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến  $(O ; R)$  thành  $(O' ; R)$  ?  
 (A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;  
 (C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.
21. Cho đường tròn  $(O ; R)$ . Có bao nhiêu phép vị tự với tâm  $O$  biến  $(O ; R)$  thành chính nó ?  
 (A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;  
 (C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.
22. Cho đường tròn  $(O ; R)$ . Có bao nhiêu phép vị tự biến  $(O ; R)$  thành chính nó ?  
 (A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;  
 (C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.
23. Cho hai phép vị tự  $V_{(O,k)}$  và  $V_{(O',k')}$  với  $O$  và  $O'$  là hai điểm phân biệt và  $kk' = 1$ . Hợp thành của hai phép vị tự đó là phép nào trong các phép sau đây ?  
 (A) Phép tịnh tiến ; (B) Phép đối xứng trục ;  
 (C) Phép đối xứng tâm ; (D) Phép quay.

## B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

## §1, §2. Mở đầu về phép biến hình. Phép tịnh tiến và phép dời hình

1. Giả sử phép tịnh tiến  $T_{\vec{u}}$  biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$ . Lấy hai điểm phân biệt  $M, N$  trên  $d$  và gọi  $M', N'$  lần lượt là ảnh của  $M, N$  qua phép tịnh tiến  $T_{\vec{u}}$  thì  $M', N'$  nằm trên  $d'$ . Ta có  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ . Vậy hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  có cùng vectơ chỉ phương nên  $d \parallel d'$  hoặc  $d$  trùng với  $d'$ .

$d$  trùng với  $d'$  khi  $\vec{u}$  cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$ , tức là khi  $\vec{u}$  là vectơ chỉ phương của  $d$  hoặc  $\vec{u} = \vec{0}$ ;  $d \parallel d'$  khi  $\vec{u}$  không phải là vectơ chỉ phương của  $d$ .

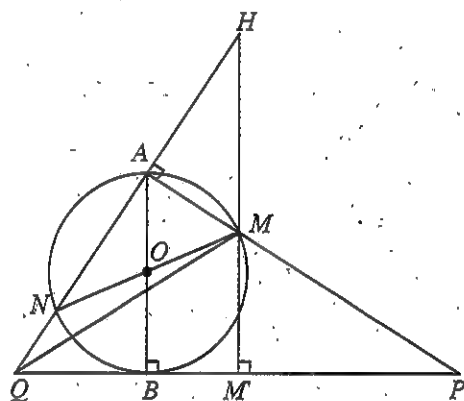
2. Phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{OO'}$ , trong đó  $O$  là giao điểm của  $a$  và  $b$ ;  $O'$  là giao điểm của  $a'$  và  $b'$ .
3. (h.2)

Tam giác  $MPQ$  có  $QA$  là một đường cao (vì  $QA \perp MP$ ). Bởi vậy nếu ta kẻ  $MM' \perp PQ$  thì  $MM'$  cắt  $QA$  tại trực tâm  $H$  của tam giác  $MPQ$ ; đoạn thẳng  $OA$  là đường trung bình của tam giác  $NMH$  nên

$$\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

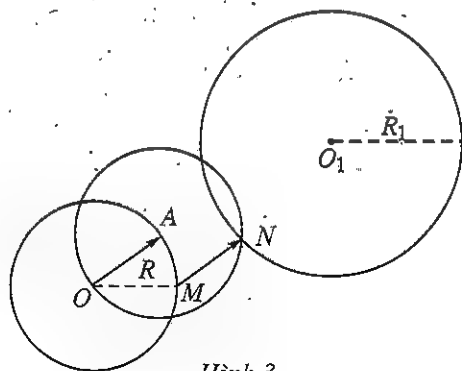
Vậy phép tịnh tiến  $T$  theo vectơ  $\overrightarrow{BA}$  biến  $M$  thành  $H$ . Chú ý rằng  $M$  không trùng với  $A$  hoặc  $B$ , ta suy ra quỹ tích  $H$  là ảnh của đường tròn  $(O)$  (không kể hai điểm  $A$  và  $B$ ) qua phép tịnh tiến đó.

Làm tương tự đối với trục tâm  $H'$  của tam giác  $NPQ$ .



Hình 2

4. (h.3) : Giả sử đã xác định được  $M$  và  $N$  theo yêu cầu của bài toán. Khi đó, phép tịnh tiến  $T$  theo vector  $\overrightarrow{OA}$  sẽ biến điểm  $M$  thành điểm  $N$  và biến đường tròn  $(O ; R)$  thành đường tròn  $(A ; R)$ . Vì  $(O ; R)$  đi qua  $M$ , nên  $(A ; R)$  đi qua  $N$ . Do đó  $N$  là giao điểm của hai đường tròn  $(A ; R)$  và  $(O_1 ; R_1)$ . Từ đó, dễ dàng suy ra cách dựng.



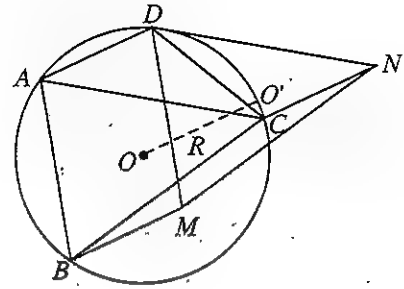
Hình 3

Số nghiệm hình phụ thuộc vào số giao điểm của hai đường tròn  $(A; R)$  và  $(O_1; R_1)$ .

5. (h.4)

Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN}.$$



Hình 4

Vì vậy, phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{AD}$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $DMN$ . Suy ra, nếu  $O'$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DMN$  thì phép tịnh tiến đó biến  $O$  thành  $O'$ , tức là

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AD}.$$

Do đó

$$OO' = AD = R$$

và vì vậy  $O'$  nằm trên  $(O; R)$ .

6. Với điểm  $M$  bất kì, giả sử  $T(M) = M_1$  và  $T'(M_1) = M'$ . Khi đó  $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$  và  $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$ , suy ra  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$ . Hợp thành của  $T$  và  $T'$  biến  $M$  thành  $M'$  nên hợp thành đó là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u} + \vec{v}$ .

Phép hợp thành đó là phép đồng nhất khi và chỉ khi

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

7. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến  $T$  là  $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

suy ra  $x = x' - 1$ ,  $y = y' + 2$ .

a) i) Nếu  $M(x; y)$  nằm trên đường thẳng  $a$  thì  $3x - 5y + 1 = 0$  hay  $3(x' - 1) - 5(y' + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 5y' - 12 = 0$ . Điều đó chứng tỏ điểm  $M'(x'; y')$  thỏa mãn phương trình  $3x' - 5y' - 12 = 0$ . Đó là phương trình ảnh của đường thẳng  $a$ .

ii) Đường thẳng  $b$  có vector chỉ phương là  $\vec{u}(1; -2)$  nên phép tịnh tiến  $T$  biến  $b$  thành chính nó. Vậy ảnh của  $b$  cũng có phương trình  $2x + y + 100 = 0$ .

b) Nếu  $M(x; y)$  nằm trên đường tròn đã cho thì

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = 0 &\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2 - 4(x' - 1) + (y' + 2) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 6x' + 5y' + 10 = 0. \end{aligned}$$

Như vậy điểm  $M'(x'; y')$  thoả mãn phương trình  $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 10 = 0$ .  
Đó là phương trình đường tròn ảnh của đường tròn đã cho.

8. Giả sử điểm  $M(x; y)$  nằm trên đường thẳng  $d: Ax + By + C = 0$ . Khi đó ảnh của  $M$  là điểm  $M'(x'; y')$  mà  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$  hay  $x = x' - a$ ,  $y = y' - b$ . Suy ra  $A(x' - a) + B(y' - b) + C = 0$ , hay

$$Ax' + By' - aA - bB + C = 0. \quad (1)$$

Để phép tịnh tiến  $T$  biến  $d$  thành  $d'$  ta phải có  $Ax' + By' + C' = 0$ . (2)

So sánh (1) và (2) ta suy ra  $aA + bB + C' - C = 0$  (\*).

Vậy các vectơ  $\vec{u}(a; b)$  cần tìm phải có tọa độ thoả mãn điều kiện (\*).

9. Giả sử  $F$  là phép dời hình biến  $A$  thành  $A'$ , biến  $B$  thành  $B'$ , biến  $C$  thành  $C'$ . Nếu  $F$  không phải là phép đồng nhất thì có ít nhất một điểm  $M$  sao cho  $F(M) = M'$  và  $M'$  khác với  $M$ . Khi đó, vì  $F$  biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $M$  thành  $M'$  nên  $AM = A'M'$ ; tương tự ta cũng có  $BM = B'M'$ ,  $CM = C'M'$ . Vậy ba điểm  $A, B, C$  nằm trên đường trung trực của  $MM'$ , trái với giả thiết  $A, B, C$  không thẳng hàng. Vậy  $F$  phải là phép đồng nhất.

10. Vì mỗi phép dời hình đều không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, nên hợp thành của chúng cũng có tính chất đó, bởi vậy nó cũng là phép dời hình.

11. Giả sử phép dời hình  $F$  biến hai đường thẳng song song  $a$  và  $b$  thành hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$ . Ta lấy đường thẳng  $c$  nào đó vuông góc với  $a$  và  $b$ , cắt  $a$  và  $b$  lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Khi đó  $F$  biến  $A$  thành  $A'$  nằm trên  $a'$ , biến  $B$  thành  $B'$  nằm trên  $b'$ . Vì  $a \perp AB$  và  $b \perp AB$  nên  $a' \perp A'B'$  và  $b' \perp A'B'$ . Vậy  $a' \parallel b'$  và vì  $AB = A'B'$  nên khoảng cách giữa  $a$  và  $b$  bằng khoảng cách giữa  $a'$  và  $b'$ .

12. Giả sử có hai phép dời hình khác nhau  $F_1$  và  $F_2$  cùng biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$ . Khi đó, có ít nhất một điểm  $M$  sao cho  $F_1$  biến  $M$  thành  $M'_1$  và  $F_2$  biến  $M$  thành  $M'_2$  khác  $M'_1$ . Khi đó ta có

$$AM = A'M'_1 \text{ và } AM = A'M'_2$$

nên  $A'M'_1 = A'M'_2$  hay  $A'$  nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng  $M'_1M'_2$ .

Tương tự, điểm  $B'$  và  $C'$  cũng nằm trên đường trung trực đó. Suy ra ba điểm  $A', B', C'$  thẳng hàng, vô lí.

13. a) Phép dời hình  $F$  biến mỗi đường tròn  $(O; R)$  thành đường tròn  $(O'; R)$ , trong đó điểm  $O'$  là ảnh của điểm  $O$ . Nếu hai đường tròn đó trùng nhau thì

$O$  phải trùng với  $O'$  và do đó trùng với  $I$ . Vậy các đường tròn được biến thành chính nó khi và chỉ khi chúng có tâm là  $I$ .

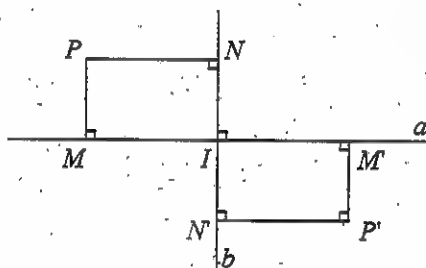
b) Giả sử  $a$  là đường thẳng không đi qua  $I$ . Ta kẻ  $IH \perp a$ ,  $H \in a$ . Khi đó  $F$  biến  $H$  thành  $H'$ , biến đường thẳng  $IH$  thành đường thẳng  $IH'$  và biến đường thẳng  $a$  thành đường thẳng  $a'$  đi qua  $H'$  và vuông góc với  $IH'$  tại  $H'$ . Chú ý rằng vì  $a$  không đi qua  $I$  nên  $H$  không trùng với  $H'$ . Từ đó, suy ra  $a'$  không trùng với  $a$ .

14. (h.5)

Lấy điểm  $M$  bất kì nằm trên  $a$  và khác  $I$ , phép dời hình  $F$  biến  $a$  thành  $a$  nên biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  trên  $a$ ,  $IM = IM'$ . Ngoài ra vì  $M$  khác  $M'$  nên  $I$  là trung điểm của  $MM'$ .

Gọi  $b$  là đường thẳng đi qua  $I$ , vuông góc với  $a$  thì  $F$  biến  $b$  thành đường thẳng đi qua  $I$  và vuông góc với  $a$ . Do đó  $b$  biến thành  $b$ . Cũng lập luận như trên, nếu  $N$  nằm trên  $b$  thì  $F$  biến  $N$  thành  $N'$  sao cho  $I$  là trung điểm của  $NN'$ .

Bây giờ giả sử điểm  $P$  không nằm trên  $a$  và  $b$ . Kẻ  $PM \perp a$  và  $PN \perp b$  ( $M \in a$ ,  $N \in b$ ). Theo chứng minh trên  $M$  biến thành  $M'$ ,  $N$  biến thành  $N'$  sao cho  $I$  là trung điểm của  $MM'$  và  $NN'$ . Suy ra  $P$  biến thành điểm  $P'$  sao cho  $M'IN'P'$  là hình chữ nhật và do đó  $I$  là trung điểm của  $PP'$ .

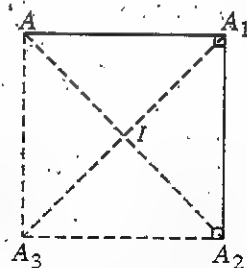


Hình 5

15. (h.6)

Trước hết,  $F$  không thể biến hai điểm phân biệt thành chính nó vì khi đó đường thẳng đi qua hai điểm đó phải biến thành chính nó, trái với giả thiết là  $F$  biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc.

Để chứng minh sự tồn tại của điểm biến thành chính nó, ta hãy lấy một điểm  $A$  nào đó và gọi  $A_1 = F(A)$ ,  $A_2 = F(A_1)$ .



Hình 6

Nếu  $A$  trùng  $A_1$  thì  $A$  là điểm biến thành chính nó, bởi vậy ta giả sử rằng  $A$  khác  $A_1$ . Khi đó  $A_2$  khác  $A_1$  và đường thẳng  $A_1A_2$  vuông góc với đường thẳng  $AA_1$ . Đường thẳng ảnh của  $AA_2$  là đường thẳng  $d$  qua  $A_1$ , vuông góc với  $AA_2$ . Đường thẳng ảnh của  $A_1A_2$  là đường thẳng  $d'$  qua  $A_2$ , vuông góc



với  $A_1A_2$ . Vậy  $F$  biến  $A_2$  thành giao điểm  $A_3$  của  $d$  và  $d'$ . Vì  $F$  là phép dời hình nên  $AA_1A_2A_3$  là hình vuông. Trung điểm  $I$  của  $AA_2$  biến thành trung điểm của  $A_1A_3$ , tức là  $I$  biến thành chính nó qua  $F$ . Vậy  $F$  có duy nhất điểm  $I$  biến thành chính nó.

16. Nếu  $F$  là phép dời hình có tính chất đã cho thì dễ thấy  $F$  không có điểm biến thành chính nó, vì nếu  $I$  là điểm như thế thì đường thẳng  $a$  đi qua  $I$  biến thành đường thẳng  $a'$  cũng đi qua  $I$  nên  $a'$  không song song với  $a$ .

Ta lấy một điểm  $A$  bất kì, gọi  $A' = F(A)$  và  $A'' = F(A')$  thì đường thẳng  $a$  đi qua  $A$  và  $A'$  biến thành đường thẳng  $a'$  đi qua  $A'$  và  $A''$ , do đó  $a$  và  $a'$  cắt nhau tại  $A'$ , vô lí. Vậy không có phép dời hình  $F$  có tính chất đã cho.

17. Ta lấy hai điểm bất kì  $M = (x_0; y_0)$  và  $N = (x_1; y_1)$ . Khi đó  $F$  biến  $M, N$  lần lượt thành  $M', N'$  có tọa độ

$$M' = (ax_0 + by_0 + p; cx_0 + dy_0 + q) \text{ và } N' = (ax_1 + by_1 + p; cx_1 + dy_1 + q).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= [a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)]^2 + [c(x_1 - x_0) + d(y_1 - y_0)]^2 \\ &= (a^2 + c^2)(x_1 - x_0)^2 + (b^2 + d^2)(y_1 - y_0)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \\ &= MN^2. \end{aligned}$$

Như vậy  $M'N' = MN$ .

Vậy  $F$  là phép dời hình.

### §3. Phép đối xứng trục

18. a) Giả sử  $M$  nằm trên đường thẳng  $AB$  và  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép dời hình  $F$ . Khi đó, vì  $F$  biến đường thẳng  $AB$  thành đường thẳng  $AB$  và giữ nguyên thứ tự ba điểm  $A, B, M$  cũng giống như thứ tự ba điểm  $A, B, M'$ . Ngoài ra vì  $AM = AM'$  và  $BM = BM'$ , nên điểm  $M$  phải trùng với  $M'$ .

b) Gọi  $N$  là một điểm không nằm trên đường thẳng  $AB$  và  $N' = F(N)$ . Ta có  $N'$  khác  $N$ , vì nếu  $N' = N$  thì  $F$  là phép đồng nhất. Như vậy, hai tam giác  $ABN$  và  $ABN'$  bằng nhau suy ra  $N$  và  $N'$  đối xứng với nhau qua đường thẳng  $AB$ . Vậy  $F$  là phép đối xứng qua  $AB$ .

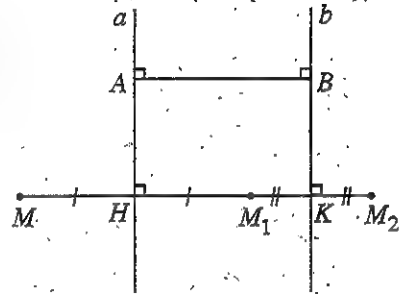
19. Gọi  $F$  là phép dời hình biến  $A$  thành  $A, B$  thành  $B$ , ta lấy điểm  $C$  không thẳng hàng với  $A, B$  và  $C'$  là ảnh của  $C$  qua phép dời hình  $F$ . Khi đó tam giác  $ABC$  bằng tam giác  $ABC'$ . Chỉ có hai trường hợp xảy ra :

+ Điểm  $C'$  trùng với điểm  $C$ . Khi đó  $F$  là phép đồng nhất (bài tập 9).

+ Điểm  $C'$  đối xứng với điểm  $C$  qua đường thẳng  $AB$ . Khi đó  $F$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $AB$  (bài tập 12).

20. a) (h.7)

Giả sử  $D_a, D_b$  là các phép đối xứng trục có trục lần lượt là  $a, b$  mà  $a \parallel b$  và  $F$  là hợp thành của  $D_a$  và  $D_b$ . Lấy hai điểm  $A, B$  lần lượt nằm trên  $a, b$  sao cho  $AB \perp a$ . Với điểm  $M$  bất kì,  $D_a$  biến  $M$  thành  $M_1$  và  $D_b$  biến  $M_1$  thành  $M_2$ . Nếu gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $MM_1$  và  $M_1M_2$  thì



Hình 7

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \\ &= 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Vì phép hợp thành  $F$  biến  $M$  thành  $M_2$  mà  $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$  nên  $F$  là phép tịnh tiến theo vector  $2\overrightarrow{AB}$ .

b) Giả sử  $T$  là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$ . Lấy một đường thẳng  $a$  nào đó vuông góc với  $\vec{u}$  và đường thẳng  $b$  là ảnh của  $a$  qua phép tịnh tiến theo vector  $\frac{1}{2}\vec{u}$  thì theo câu a) phép tịnh tiến  $T$  là hợp thành của phép đối xứng trục  $D_a$  và phép đối xứng trục  $D_b$ . Vì có nhiều cách chọn đường thẳng  $a$ , nên có nhiều phép đối xứng  $D_a$  và  $D_b$  có hợp thành là  $T$ .

c) Hợp thành của hai phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến. Vì vậy, hợp thành của  $2n$  phép đối xứng trục (có trục đối xứng song song) là hợp thành của  $n$  phép tịnh tiến, do đó cũng là phép tịnh tiến.

d) Giả sử  $F$  là hợp thành của  $2n + 1$  phép đối xứng trục. Gọi phép đối xứng trục thứ nhất là  $D_a$  (có trục là đường thẳng  $a$ ),  $2n$  phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép tịnh tiến  $T$ . Ta có thể xem  $T$  là hợp thành của hai phép đối xứng mà phép thứ nhất là  $D_a$  và phép thứ hai là  $D_b$ . Vậy  $F$  là hợp thành của ba phép đối xứng:  $D_a, D_a$  và  $D_b$ . Nhưng vì hợp thành của  $D_a$  và  $D_a$  là phép đồng nhất  $e$  nên  $F$  chính là phép đối xứng  $D_b$ .

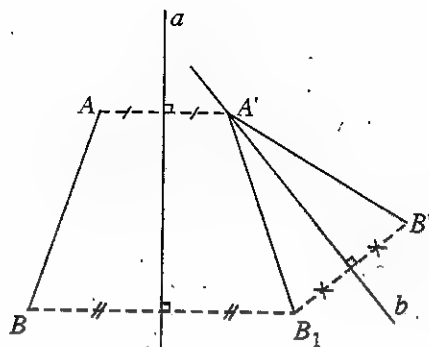
e) Có thể xem phép tịnh tiến  $T$  là hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_b$  và  $D_c$ . Vì vector tịnh tiến vuông góc với  $a$  nên  $a \parallel b \parallel c$ . Do đó, ta được hợp

thành của ba phép đối xứng có trục song song. Vậy theo kết quả câu d), ta được một phép đối xứng trục.

21. (h.8)

Nếu  $A$  và  $A'$  trùng nhau,  $B$  và  $B'$  trùng nhau thì phép cần tìm là phép đối xứng trục có trục  $AB$ .

Nếu  $A$  không trùng  $A'$  thì ta lấy  $a$  là trung trực của  $AA'$ . Khi đó phép đối xứng trục  $D_a$  biến  $A$  thành  $A'$ . Kí hiệu  $B_1$  là ảnh của  $B$  qua phép  $D_a$ . Nếu  $B_1$  trùng  $B'$  thì  $D_a$  là phép đối xứng trục cần tìm. Nếu  $B_1$  khác với  $B'$  thì  $A'B_1 = AB$  nên  $A'B_1 = A'B'$ . Từ đó, suy ra đường trung trực  $b$  của đoạn thẳng  $B_1B'$  đi qua điểm  $A'$  và do đó phép đối xứng trục  $D_b$  biến  $A'$  thành  $A'$  và biến  $B_1$  thành  $B'$ .



Hình 8

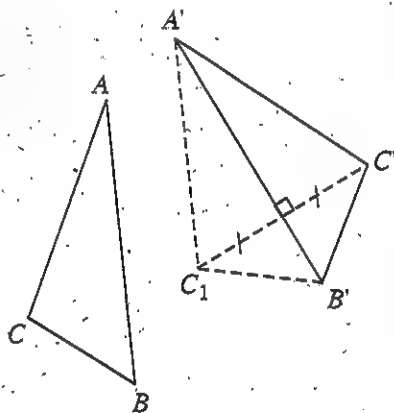
Vậy hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_a$  và  $D_b$  là phép dời hình biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $B$  thành  $B'$ .

22. (h.9)

Theo bài toán trên ta có hai phép đối xứng trục  $D_1$  và  $D_2$  mà hợp thành của chúng biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $B$  thành  $B'$ . Phép hợp thành đó là phép dời hình nên nó biến điểm  $C$  thành điểm  $C_1$  sao cho hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C_1$  bằng nhau. Vậy  $C_1$  phải trùng với  $C'$  hoặc đối xứng với  $C'$  qua đường thẳng  $A'B'$ .

Nếu  $C_1$  trùng với  $C'$  thì phép hợp thành nói trên là phép cân tim.

Nếu  $C_1$  khác với  $C'$  thì vì hai tam giác  $A'B'C_1$  và  $A'B'C'$  bằng nhau nên phép



Hình 9

đối xứng  $D_c$  với  $c$  là đường thẳng  $A'B'$  sẽ biến tam giác  $A'B'C_1$  thành tam giác  $A'B'C'$ . Vậy hợp thành của ba phép  $D_a$ ,  $D_b$  và  $D_c$  là phép dời hình cân tim.

23. a) Phép đối xứng qua  $Ox$  biến điểm  $M(x; y)$  thành điểm  $M'(x'; y')$

mà  $x = x'$  và  $y = -y'$ . Nếu  $M(x; y)$  nằm trên  $d$  thì  $Ax + Bx + C = 0$  hay  $Ax' - By' + C = 0$ . Vậy  $M'(x'; y')$  thoả mãn phương trình  $Ax - By + C = 0$ . Đó là phương trình ảnh của  $d$  qua phép đối xứng trục  $Ox$ .

b) Phép đối xứng qua  $Oy$  biến điểm  $M(x; y)$  thành điểm  $M'(x'; y')$  mà  $x = -x'$  và  $y = y'$ . Nếu  $M(x; y)$  nằm trên  $(\mathcal{C})$  thì

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2ax' + 2by' + c = 0.$$

Vậy  $M'(x'; y')$  thoả mãn phương trình  $x^2 + y^2 - 2ax + 2by + c = 0$ . Đó là phương trình ảnh của  $(\mathcal{C})$  qua phép đối xứng trục với trục là  $Oy$ .

c) Đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm là  $I(-a; -b)$ , rõ ràng tâm  $I$  nằm trên đường thẳng  $bx - ay = 0$ . Suy ra phép đối xứng qua đường thẳng đó biến  $(\mathcal{C})$  thành chính nó. Vậy ảnh của  $(\mathcal{C})$  có phương trình trùng với phương trình của  $(\mathcal{C})$ .

24. (h.10)

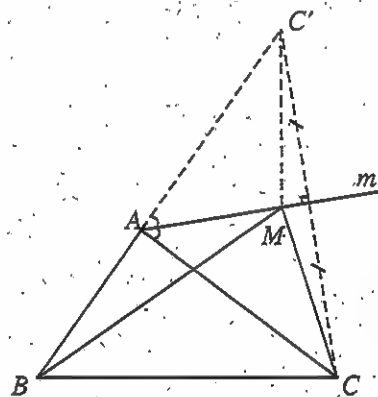
Gọi  $C'$  là điểm đối xứng với điểm  $C$  qua đường phân giác ngoài  $m$ . Khi đó hiển nhiên  $A$  nằm giữa  $B$  và  $C'$ . Với mọi điểm  $M$  nằm trên  $m$  ta có

$$MB + MC = MB + MC' \geq BC'.$$

$$\text{Mà } BC' = AB + AC' = AB + AC.$$

$$\text{Vậy } MB + MC + BC \geq AB + AC + BC.$$

Đó là điều phải chứng minh.



Hình 10

25. (h.11)

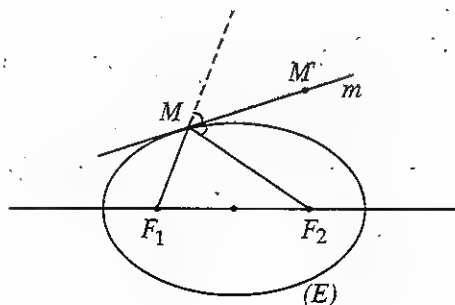
Giả sử elip  $(E)$  có trục lớn là  $2a$ , tức là điểm  $M$  nằm trên  $(E)$  khi và chỉ khi

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Theo chứng minh bài tập 24, nếu  $M'$  nằm trên phân giác  $m$  thì

$$MF_1 + M'F_2 \geq MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $M'$  trùng  $M$ . Vậy nếu  $M'$  khác  $M$  thì  $M'$  không nằm trên  $(E)$ . Từ đó, suy ra  $m$  cắt  $(E)$  tại điểm duy nhất  $M$ .



Hình 11

26. (h.12)

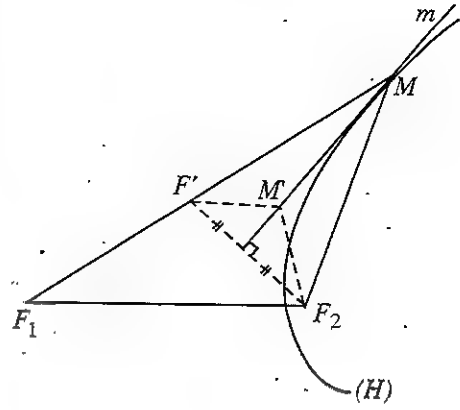
Giả sử hypebol  $(H)$  có trục thực là  $2a$ , nghĩa là điểm  $M$  nằm trên  $(H)$  khi và chỉ khi

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Ta xét trường hợp  $MF_1 - MF_2 = 2a$  (trường hợp  $MF_2 - MF_1 = 2a$  chứng minh tương tự). Gọi  $F'$  là điểm đối xứng với  $F_2$  qua phân giác  $m$  thì  $F'$  nằm giữa  $M$  và  $F_1$ . Khi đó, nếu lấy  $M'$  nằm trên  $m$  thì

$$\begin{aligned} MF_1 - MF_2 &= MF_1 - M'F' \leq F_1F' = MF_1 - MF' \\ &= MF_1 - MF_2 \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi  $M'$  trùng  $M$ . Vậy nếu  $M'$  khác  $M$  thì  $M'$  không nằm trên  $(H)$ . Từ đó suy ra  $m$  cắt  $(H)$  tại điểm duy nhất  $M$ .



Hình 12

27. (h.13)

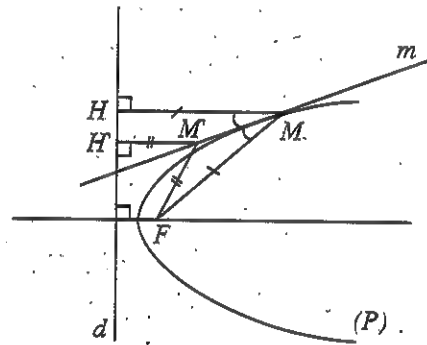
Vì  $M$  nằm trên parabol  $(P)$  nên  $MF = MH$ . Do đó  $m$  chính là đường trung trực của đoạn thẳng  $FH$ . Lấy điểm  $M'$  tùy ý nằm trên  $m$ , kẻ

$$M'H' \perp d \quad (H' \in d)$$

thì ta có  $MF = MH \geq M'H$ .

Nếu  $M'$  không trùng với  $M$  thì  $MF > MH$  nên  $M'$  không nằm trên  $(P)$ .

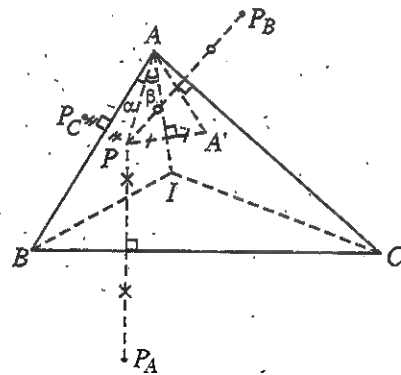
Vậy  $M$  chỉ cắt  $(P)$  tại điểm duy nhất  $M$ .



Hình 13

28. (h.14)

Ta xét trường hợp  $P$  nằm trong góc  $BAI$ . Gọi  $P_A, P_B, P_C$  là các điểm đối xứng với  $P$  lần lượt qua các đường thẳng  $BC, CA, AB$ . Ta chứng minh rằng  $AA'$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $P_B P_C$ . Thật vậy, nếu ta kí hiệu  $\widehat{PAB} = \alpha, \widehat{PAI} = \beta$ , ta có



Hình 14



$$\widehat{P_C AA'} = \widehat{P_C AP} + \widehat{PAA'} = 2\alpha + 2\beta$$

và

$$\widehat{A' AP_B} = \widehat{A' AC} + \widehat{CAP_B} = \widehat{A' AC} + \widehat{CAP} = \alpha + \alpha + 2\beta = 2\alpha + 2\beta.$$

Vậy  $\widehat{P_C AA'} = \widehat{A' AP_B}$ .

Ngoài ra, hiển nhiên  $AP_C = AP_B$ . Suy ra  $AA'$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $P_B P_C$ . Chứng minh tương tự, ta cũng có  $BB'$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $P_C P_A$  và  $CC'$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $P_A P_B$ . Suy ra  $AA', BB', CC'$  đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $P_A P_B P_C$ .

Trường hợp  $P$  nằm trong góc  $CAI$ , lập luận tương tự.

29. (h.15)

Trước hết, dễ thấy rằng các điểm  $A, B, C$  lần lượt nằm trên các cạnh  $B'C', C'A', A'B'$  của tam giác  $A'B'C'$  và các đường thẳng  $AA', BB', CC'$  đi qua tâm  $O$  của đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

Kẻ  $A'H \perp BC$  ( $H \in BC$ ) ta có

$$\widehat{CA'H} = \widehat{OCB}$$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc) và

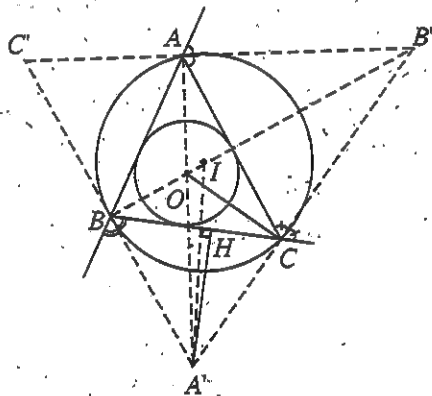
$$\widehat{OCB} = \widehat{BA'O}$$

(do tứ giác  $OBA'C$  nội tiếp đường tròn).

Từ đó, suy ra

$$\widehat{CA'H} = \widehat{BA'O}.$$

Do đó, nếu gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $A'B'C'$  thì  $A'I$  là phân giác góc  $B'A'C'$  nên  $A'H$  đối xứng với  $A'O$  qua đường thẳng  $A'I$ . Bởi vậy  $A'H$  đi qua điểm đối xứng với  $O$  qua phân giác  $A'I$ . Tương tự ta cũng có đường thẳng đi qua  $B'$ , vuông góc với  $AC$  cũng đi qua điểm đối xứng với  $O$  qua  $B'I$  và đường thẳng đi qua  $C'$ , vuông góc với  $AB$  cũng đi qua điểm đối xứng với  $O$  qua  $C'I$ . Từ đó, áp dụng bài tập 28 ta suy ra điều phải chứng minh.

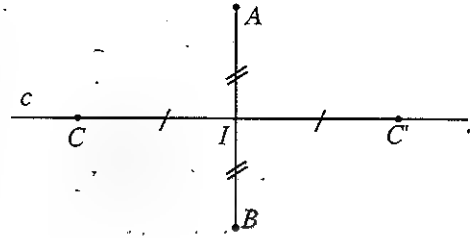


Hình 15

## §4. Phép quay và phép đối xứng tâm

30. (h.16)

Vì  $F$  biến  $A$  thành  $B$  và biến  $B$  thành  $A$  nên  $F$  biến trung điểm  $I$  của  $AB$  thành chính nó. Nếu gọi  $c$  là đường trung trực của  $AB$  thì  $F$  biến  $c$  thành chính nó. Trên  $c$  lấy hai điểm  $C$  và  $C'$  đối xứng với nhau qua  $I$  thì hoặc  $F$  biến  $C$  thành  $C$  hoặc  $F$  biến  $C$  thành  $C'$ .



Hình 16

Nếu  $F$  biến  $C$  thành  $C$  thì  $F$  biến tam

giác  $ABC$  thành tam giác  $BAC$ . Vậy  $F$  chính là phép đối xứng trục  $D_c$ .

Nếu  $F$  biến  $C$  thành  $C'$  thì  $F$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $BAC'$ . Vậy  $F$  chính là phép đối xứng tâm  $D_I$ .

31. (h.17)

Giả sử  $Q$  và  $Q'$  là hai phép quay có tâm  $O$  với góc quay lần lượt là  $\varphi$  và  $\varphi'$ , còn  $F$  là hợp thành của  $Q$  và  $Q'$ . Với mọi điểm  $M$  khác  $O$ , giả sử  $Q$  biến  $M$  thành  $M_1$  và  $Q'$  biến  $M_1$  thành  $M_2$ . Khi đó, ta có

$$OM = OM_1 = OM_2$$

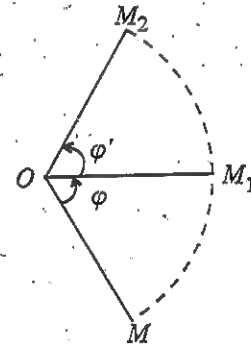
$$(OM, OM_1) = \varphi, (OM_1, OM_2) = \varphi'.$$

$$\text{Suy ra } OM = OM_2$$

$$\begin{aligned} \text{và } (OM, OM_2) &= (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2) \\ &= \varphi + \varphi'. \end{aligned}$$

Vậy hợp thành  $F$  là phép quay tâm  $O$  góc quay bằng  $\varphi + \varphi'$ .

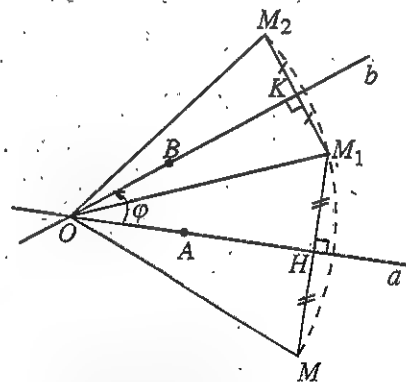
Từ đó suy ra: Hợp thành của một số hữu hạn phép quay có tâm trùng nhau là một phép quay với tâm đó và có góc quay bằng tổng các góc quay của các phép quay đã cho.



Hình 17

32. a) (h.18)

Giả sử cho hai phép đối xứng trục  $D_a$  và  $D_b$  có trục  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $O$ ,



Hình 18

còn  $F$  là hợp thành của  $D_a$  và  $D_b$ . Lấy hai điểm  $A, B$  khác  $O$  lần lượt nằm trên  $a, b$  sao cho góc  $AOB$  không tù và đặt  $\varphi = (OA, OB)$ .

(Chú ý rằng khi đó  $|\varphi| = \widehat{AOB}$  là góc hợp bởi hai đường thẳng  $a$  và  $b$ ).

Với mọi điểm  $M$  khác  $O$ , giả sử  $D_a$  biến  $M$  thành  $M_1$  và  $D_b$  biến  $M_1$  thành  $M_2$ . Khi đó, nếu gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $MM_1$  và  $M_1M_2$  thì ta có

$$OM = OM_1 = OM_2$$

$$\begin{aligned} \text{và } (OM, OM_2) &= (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2) \\ &= 2(OH, OM_1) + 2(OM_1, OK) \\ &= 2(OH, OK) = 2\varphi. \end{aligned}$$

Vậy phép hợp thành  $F$  là phép quay tâm  $O$  góc quay  $2\varphi$ .

b) Giả sử  $Q$  là phép quay tâm  $O$  góc quay  $\varphi$ . Ta lấy đường thẳng  $a$  nào đó đi qua  $O$  và  $b$  là ảnh của  $a$  qua phép quay tâm  $O$  góc quay  $\frac{\varphi}{2}$  thì hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_a$  và  $D_b$  chính là phép quay  $Q$  (theo câu a)). Cố nhiên có thể chọn  $a$  bằng nhiều cách khác nhau.

c) Nếu  $F$  là hợp thành của  $2n$  phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy tại  $O$  thì  $F$  là hợp thành của  $n$  phép quay có tâm  $O$  và do đó  $F$  là một phép quay.

d) Giả sử  $F$  là hợp thành của  $2n + 1$  phép đối xứng trục có các trục đều đi qua  $O$ . Gọi  $D_a$  là phép đối xứng đầu tiên, thì  $2n$  phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép quay  $Q$  tâm  $O$ . Ta xem  $Q$  là hợp thành của hai phép đối xứng trục, trong đó phép thứ nhất là  $D_a$  và phép thứ hai là  $D_b$ . Như vậy,  $F$  là hợp thành của ba phép đối xứng trục:  $D_a, D_a$  và  $D_b$ . Vậy  $F$  chính là phép đối xứng trục  $D_b$ .

33. Phép đối xứng qua điểm  $I$  biến  $A$  thành  $C$ . Vậy quỹ tích  $C$  là đường tròn đối xứng với  $(O)$  qua  $I$ .

Phép quay  $Q$  tâm  $I$  góc quay  $90^\circ$  biến  $A$  thành  $B$  (hoặc thành  $D$ ), phép quay  $Q'$  tâm  $I$  góc quay  $-90^\circ$  biến  $A$  thành  $D$  (hoặc thành  $B$ ). Vậy quỹ tích  $B$  và  $D$  là ảnh của  $(O)$  qua hai phép quay đó.

34. Phép quay tâm  $G$  góc quay  $120^\circ$  biến  $A$  thành  $B$  (hoặc  $C$ ) và phép quay tâm  $G$  góc quay  $240^\circ$  biến  $A$  thành  $C$  (hoặc thành  $B$ ). Vậy quỹ tích  $B$  và  $C$  là ảnh của đường thẳng  $a$  qua hai phép quay nói trên.

35. Gọi  $D$  là trung điểm của  $MM_3$  thì  $ABCD$  là hình bình hành. Do đó, điểm  $D$  cố định. Vì phép đối xứng qua điểm  $D$  biến  $M$  thành  $M_3$  nên quỹ tích  $M_3$  là ảnh của đường tròn  $(O)$  qua phép đối xứng đó.

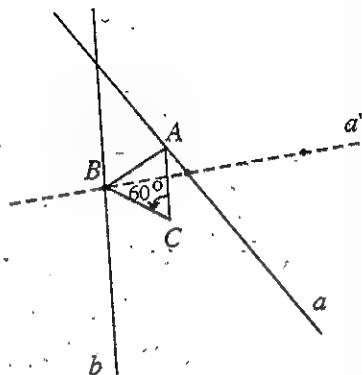
36. (h.19)

Giả sử đã dựng được tam giác đều  $ABC$  thoả mãn điều kiện đã cho. Khi đó, góc

$$(\angle CA, \angle CB) = \pm 60^\circ.$$

Nếu  $(\angle CA, \angle CB) = 60^\circ$  thì phép quay  $Q$  tâm  $C$  góc quay  $60^\circ$  sẽ biến  $A$  thành  $B$  và biến đường thẳng  $a$  thành đường thẳng  $a'$  đi qua  $B$ . Vậy ta có thể xác định điểm  $B$  như sau :

Dựng đường thẳng  $a'$  là ảnh của đường thẳng  $a$  qua phép quay  $Q$ , rồi lấy giao điểm  $B$  của  $a'$  và  $b$ . Điểm  $A$  được xác định như là ảnh của  $B$  qua phép quay tâm  $C$  góc quay  $-60^\circ$ .



Hình 19

Làm tương tự cho trường hợp  $(\angle CA, \angle CB) = -60^\circ$ .

Bài toán có ít nhất một nghiệm hình, có thể có vô số nghiệm hình.

37. Giả sử đã dựng được tam giác đều  $MNP$  thoả mãn điều kiện của bài toán. Nếu dùng phép quay  $Q$  tâm  $M$  góc quay  $60^\circ$  thì  $N$  biến thành  $P$  và hình vuông  $ABCD$  biến thành hình vuông  $A'B'C'D'$  mà  $P$  cũng nằm trên hình vuông này. Từ đó, suy ra cách dựng.

38. Nếu  $F$  là phép dời hình biến tam giác đều  $ABC$  thành chính nó thì  $F$  phải biến đỉnh của tam giác thành đỉnh của tam giác đó. Ta có thể kí hiệu tam giác với đỉnh  $A, B, C$  theo sáu cách khác nhau :

$$ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA$$

cho nên ta có sáu phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành một trong sáu tam giác kể trên. Cụ thể là :

- Phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $ABC$  : Đó là phép đồng nhất.
- Phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $ACB$  : Đó là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh  $BC$ .
- Phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $BCA$  : Đó là phép quay tâm  $O$  (tâm của tam giác đều) với góc quay  $120^\circ$ .

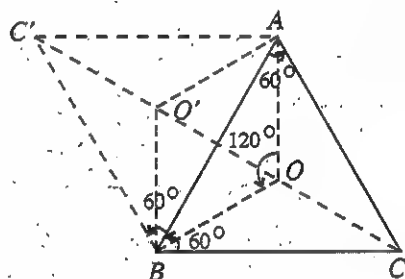
d) Phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $BAC$  : Đó là phép đối xứng qua trung trực của cạnh  $AB$ .

e) Phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $CAB$  : Đó là phép quay quanh  $O$  với góc quay  $-120^\circ$ .

f) Phép dời hình biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $CBA$  : Đó là phép đối xứng qua trung trực của cạnh  $AC$ .

39. (h.20)

a) Ta gọi  $C'$  là điểm đối xứng với điểm  $C$  qua  $AB$ . Phép quay  $Q_B$  biến  $A$  thành  $C'$ ,  $B$  thành  $B$  và biến  $C$  thành  $A$ . Phép quay  $Q_A$  biến  $C'$  thành  $B$ , biến  $B$  thành  $C$  và biến  $A$  thành  $A$ . Vậy hợp thành  $F$  là phép dời hình biến ba điểm  $A, B, C$  lần lượt thành ba điểm  $B, C, A$ .



Hình 20

b) Từ câu a), suy ra : Nếu gọi  $O$  là tâm tam giác đều  $ABC$  thì  $F$  là phép quay tâm  $O$  góc quay  $120^\circ$ .

c) Chứng minh tương tự, phép hợp thành của  $Q_A$  và  $Q_B$  là phép quay tâm  $O'$  góc quay  $120^\circ$ , trong đó  $O'$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ .

40. a) Hợp thành của  $D_{BC}$  và  $D_{AB}$  là phép quay  $Q_B$  tâm  $B$  góc quay  $120^\circ$ .

b) Hợp thành của  $D_{AB}$  và  $D_{AC}$  là phép quay  $Q_A$  tâm  $A$  góc quay  $120^\circ$ .

c) Hợp thành  $F$  của  $Q_B$  và  $Q_A$  là hợp thành của bốn phép đối xứng theo thứ tự là :  $D_{BC}, D_{AB}, D_{AB}, D_{AC}$ . Vì hợp thành của  $D_{AB}$  và  $D_{AB}$  là phép đồng nhất nên  $F$  là hợp thành của hai phép  $D_{BC}$  và  $D_{AC}$ . Vậy  $F$  là phép quay tâm  $C$  với góc quay  $240^\circ$  (hoặc có thể nói là góc quay  $-120^\circ$ ).

41. Nếu  $F$  là phép dời hình biến hình vuông  $ABCD$  thành chính nó thì  $F$  biến tâm  $O$  của hình vuông thành chính nó. Vì  $F$  biến đỉnh  $A$  thành một trong các đỉnh  $A, B, C, D$  nên ta có các trường hợp sau :

a)  $F$  biến  $A$  thành chính nó : Khi đó  $F$  hoặc là phép đồng nhất, hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng  $OA$ .

b)  $F$  biến  $A$  thành  $B$  : Khi đó  $F$  hoặc là phép đối xứng qua trung trực cạnh  $AB$ , hoặc là phép quay tâm  $O$  góc quay  $(OA, OB)$ .

c)  $F$  biến  $A$  thành  $C$  : Khi đó  $F$  hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng  $BD$ , hoặc là phép đối xứng tâm  $O$ .

d)  $F$  biến  $A$  thành  $D$  : Khi đó  $F$  hoặc là phép đối xứng qua trung trực cạnh  $AD$  hoặc là phép quay với góc quay  $(OA, OD) = 3(OA, OB)$ .

42. (h.21)

Lấy điểm  $O$  sao cho tam giác  $OAB$  là tam giác vuông cân với góc

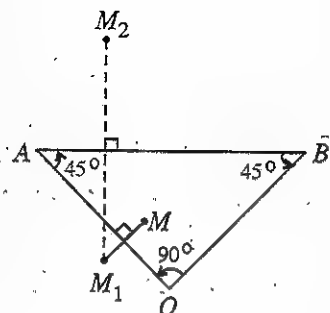
$$(AO, AB) = (BA, BO) = 45^\circ.$$

Khi đó,  $Q_A$  là hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_{AO}$  và  $D_{AB}$ , còn  $Q_B$  là hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_{AB}$  và  $D_{BO}$ . Vậy  $F$  là hợp thành của bốn phép đối xứng trục theo thứ tự :

$D_{AO}, D_{AB}, D_{AB}, D_{BO}$ , tức cũng là hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_{AO}$  và  $D_{BO}$ . Vì  $AO$

vuông góc với  $BO$  nên  $F$  là phép quay tâm  $O$  góc quay  $180^\circ$ , tức là phép đối xứng qua điểm  $O$ . Chú ý rằng có thể xác định điểm  $O$  bởi điều kiện : Tam giác  $OAB$  vuông cân và  $(OB, OA) = 90^\circ$ .

Tương tự,  $F'$  là phép đối xứng qua tâm  $O'$ , sao cho  $O'AB$  là tam giác vuông cân mà  $(OA, OB) = 90^\circ$ .



Hình 21

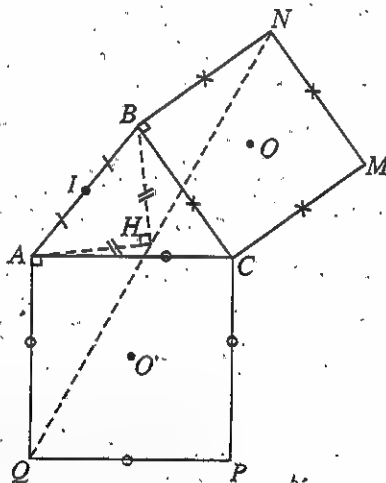
43. (h.22)

a)  $Q_A$  và  $Q_B$  lần lượt là các phép quay tâm  $A, B$  với góc quay

$$(AQ, AC) = (BC, BN) = 90^\circ.$$

Theo bài 42 ta có : Hợp thành của hai phép đó là phép đối xứng qua điểm  $H$  xác định. Vì phép đối xứng tâm  $H$  biến  $Q$  thành  $N$  nên  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $NQ$ , tức là đường thẳng  $NQ$  luôn luôn đi qua điểm  $H$  cố định.

b) Gọi  $Q_O$  và  $Q_{O'}$  là các phép quay có góc quay  $90^\circ$  với tâm quay tương ứng là  $O$  và  $O'$  thì phép hợp thành  $F$  của



Hình 22

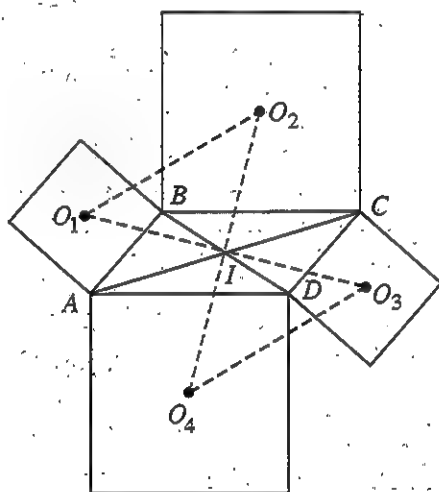
chúng biến  $B$  thành  $A$ . Nhưng vì  $F$  là phép đối xứng tâm, nên tâm đối xứng là trung điểm  $I$  của  $AB$ . Suy ra tam giác  $IOO'$  vuông cân tại đỉnh  $I$ .

*Cách giải khác*

Phép quay tâm  $C$  góc quay  $90^\circ$  biến  $A$  thành  $P$  và biến  $M$  thành  $B$ . Bởi vậy, ta có  $AM = PB$  và  $AM \perp PB$ . Chú ý rằng  $IO$  là đường trung bình của tam giác  $ABM$  và  $IO'$  là đường trung bình của tam giác  $APB$  nên ta suy ra  $IOO'$  là tam giác vuông cân.

44. (h.23)

Gọi  $O_1, O_2, O_3, O_4$  là tâm các hình vuông có cạnh lần lượt là  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $I$  là tâm hình bình hành  $ABCD$  thì  $I$  là tâm đối xứng của hình gồm hình bình hành và bốn hình vuông đã cho. Bởi vậy  $I$  là trung điểm của  $O_1O_3$  và  $O_2O_4$ . Nói cách khác  $O_1O_2O_3O_4$  là hình bình hành. Xét tam giác  $ABC$ , theo kết quả bài tập 43 ta có  $IO_1O_2$  là tam giác vuông cân. Vậy  $O_1O_2O_3O_4$  là hình vuông.

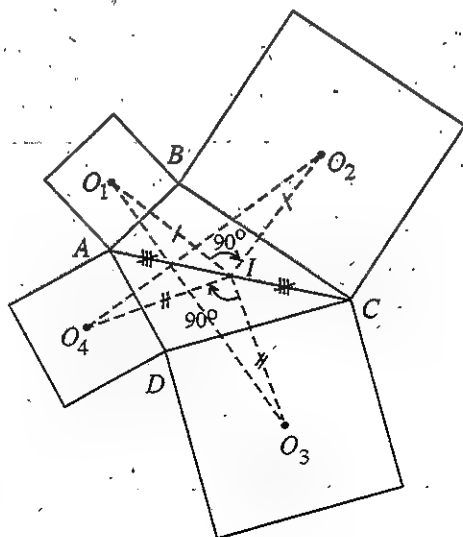


Hình 23

45. (h.24)

Gọi  $O_1, O_2, O_3, O_4$  là tâm các hình vuông có cạnh lần lượt là  $AB, BC, CD, DA$  và  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ . Xét tam giác  $ABC$  và tam giác  $ACD$  thì theo kết quả bài tập 43 ta có  $IO_1O_2$  và  $IO_4O_3$  là những tam giác vuông cân. Từ đó, suy ra phép quay tâm  $I$  góc quay  $-90^\circ$  biến  $O_1$  thành  $O_2$  và biến  $O_3$  thành  $O_4$ . Do đó, ta có

$$O_1O_3 = O_2O_4 \text{ và } O_1O_3 \perp O_2O_4.$$



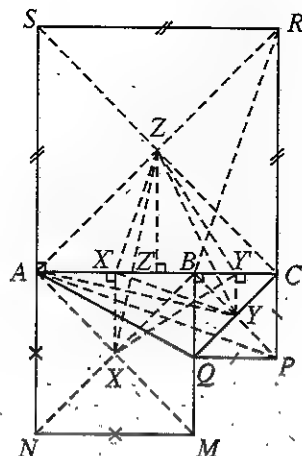
Hình 24

46. (h.25)

a) Phép quay tâm  $B$  góc quay  $90^\circ$  biến  $A$  thành  $M$  và  $Q$  thành  $C$ . Bởi vậy, biến đoạn thẳng  $AQ$  thành  $MC$ . Suy ra hai đoạn thẳng  $AQ$ ,  $MC$  bằng nhau và vuông góc với nhau. Chú ý rằng  $ZX$  là đường trung bình của tam giác  $AMC$ , còn  $ZY$  là đường trung bình của tam giác  $CAQ$  nên tam giác  $ZXY$  vuông cân tại đỉnh  $Z$ .

Dùng phép quay tâm  $C$  góc quay  $90^\circ$  ta chứng minh được hai đoạn thẳng  $PA$ ,  $BR$  bằng nhau và vuông góc với nhau. Suy ra  $XYZ$  là tam giác vuông cân tại  $X'$ . Tương tự cũng chứng minh được  $Y'XZ$  là tam giác vuông cân tại  $Y'$ .

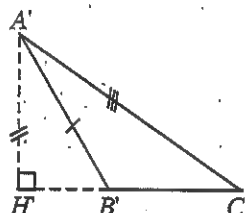
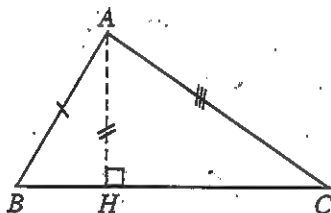
b) Phép quay tâm  $X'$  góc quay  $90^\circ$  biến điểm  $A$  thành điểm  $X$  và biến điểm  $Y$  thành điểm  $Z$ . Suy ra hai đoạn thẳng  $AY$ ,  $XZ$  bằng nhau và vuông góc với nhau.



Hình 25

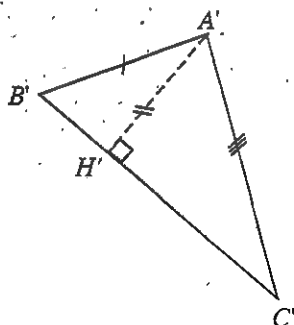
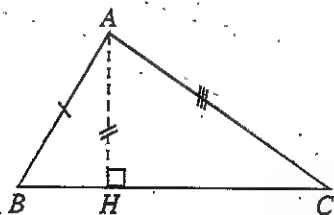
## §5. Hai hình bằng nhau

47. a) Có thể không bằng nhau (xem hình 26).



Hình 26

b) (h.27)

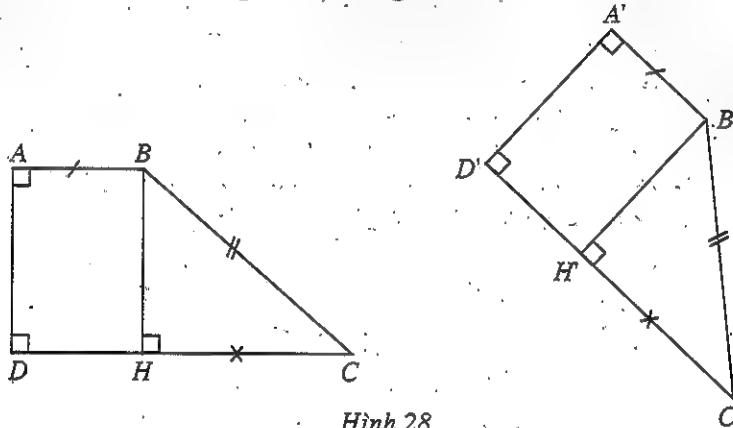


Hình 27



Vì góc  $\widehat{A}$  và  $\widehat{A'}$  là góc tù nên các góc  $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{B'}, \widehat{C'}$  đều là góc nhọn. Suy ra  $H$  ở giữa  $B$  và  $C$ ,  $H'$  ở giữa  $B'$  và  $C'$ . Vì hai tam giác vuông  $ABH$  và  $A'B'H'$  bằng nhau nên có phép dời hình  $F$  biến  $A, B, H$  lần lượt thành  $A', B', H'$ . Để thấy rằng khi đó  $F$  biến  $C$  thành  $C'$ . Vậy  $F$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$  nên hai tam giác đó bằng nhau.

48. (h.28)



Hình 28

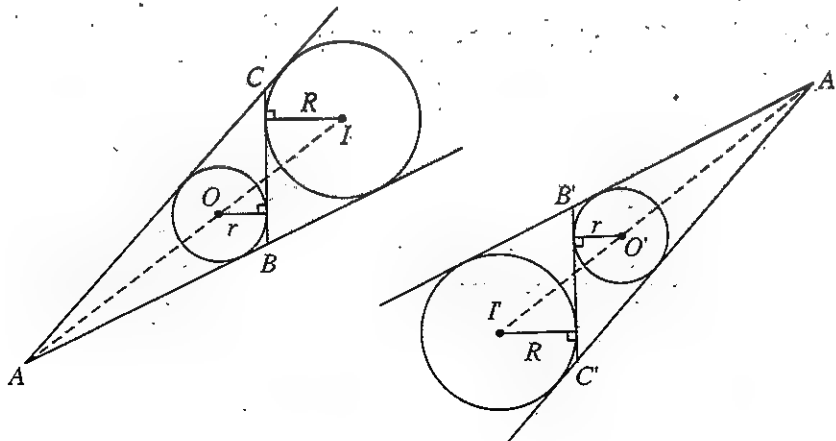
Nếu  $AB = CD$  thì kết quả là hiển nhiên.

Giả sử  $AB < CD$ . Kẻ  $BH \perp CD, B'H' \perp C'D'$ .

Ta có  $CH = CD - AB = C'D' - A'B' = C'H'$ .

Từ đó, suy ra hai tam giác vuông  $BHC$  và  $B'H'C'$  bằng nhau. Gọi  $F$  là phép dời hình biến tam giác  $BHC$  thành tam giác  $B'H'C'$ , thì dễ thấy rằng  $F$  biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $D$  thành  $D'$ . Do đó  $F$  biến hình thang  $ABCD$  thành hình thang  $A'B'C'D'$ . Vậy hai hình thang đó bằng nhau.

49. (h.29)



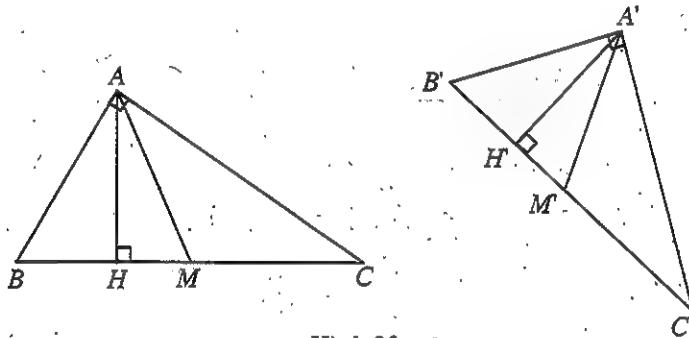
Hình 29

Giả sử tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(O; r)$ , đường tròn bàng tiếp góc  $A$  là  $(I; R)$ ; tam giác  $A'B'C'$  có đường tròn nội tiếp  $(O'; r)$ , đường tròn bàng tiếp góc  $A'$  là  $(I'; R)$ ; đồng thời  $OI = O'I'$ .

Vì  $OI = O'I'$  nên có phép dời hình  $F$  biến  $O$  thành  $O'$  và  $I$  thành  $I'$ , khi đó  $F$  biến  $(O; r)$  thành  $(O'; r)$  và biến  $(I; R)$  thành  $(I'; R)$ . Mặt khác  $F$  biến cặp tiếp tuyến chung ngoài  $AB$  và  $AC$  của hai đường tròn  $(O)$  và  $(I)$  thành cặp tiếp tuyến chung ngoài  $A'B'$  và  $A'C'$  (hoặc thành  $A'C'$  và  $A'B'$ ), còn tiếp tuyến chung  $BC$  phải biến thành tiếp tuyến chung  $B'C'$ .

Suy ra  $F$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$  hoặc thành tam giác  $A'C'B'$ , tức là hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  bằng nhau.

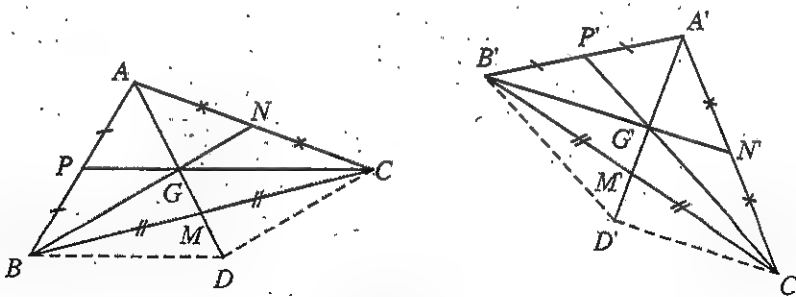
50. (h.30)



Hình 30.

Cho hai tam giác  $ABC, A'B'C'$  vuông tại các đỉnh  $A, A'$ . Có  $BC = B'C'$  và hai đường cao  $AH, A'H'$  bằng nhau. Gọi  $AM, A'M'$  là các đường trung tuyến thì  $AM = A'M'$  và do đó hai tam giác vuông  $AHM$  và  $A'H'M'$  bằng nhau. Gọi  $F$  là phép dời hình biến tam giác  $AHM$  thành tam giác  $A'H'M'$  thì dễ thấy rằng  $F$  biến đoạn thẳng  $BC$  thành đoạn thẳng  $B'C'$  (hoặc thành đoạn thẳng  $C'B'$ ). Vậy hai tam giác đã cho bằng nhau.

51. (h.31)



Hình 31

Giả sử tam giác  $ABC$  có ba trung tuyến  $AM, BN, CP$  cắt nhau tại  $G$ ; tam giác  $A'B'C'$  có ba trung tuyến  $A'M', B'N', C'P'$  cắt nhau tại  $G'$  và  $AM = A'M', BN = B'N', CP = C'P'$ .

Ta lấy điểm  $D$  và  $D'$  sao cho  $BGCD$  và  $B'G'C'D'$  là những hình bình hành. Dễ thấy rằng hai tam giác  $GCD$  và  $G'C'D'$  bằng nhau. Bởi vậy, có một phép dời hình  $F$  biến  $G, C, D$  lần lượt thành các điểm  $G', C', D'$ . Rõ ràng khi đó  $F$  biến  $A$  thành  $A', B$  thành  $B'$  nên hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  bằng nhau.

52. *Hướng dẫn.* Hãy chứng minh rằng bán kính các đường tròn tâm  $A$  và tâm  $A'$  bằng nhau, bán kính các đường tròn tâm  $B$  và tâm  $B'$  bằng nhau, bán kính các đường tròn tâm  $C$  và tâm  $C'$  bằng nhau. Suy ra phép dời hình  $F$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$  sẽ biến hình  $\mathcal{H}$  thành hình  $\mathcal{H}'$ .

## §6, §7. Phép vị tự. Phép đồng dạng

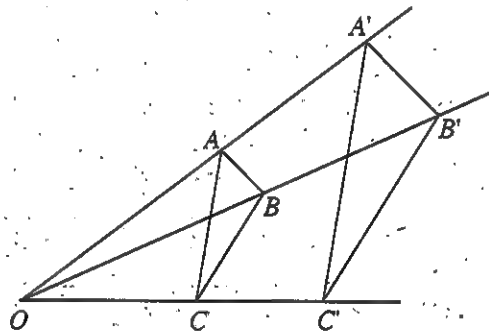
### 53. (h.32)

Vì  $AB$  và  $A'B'$  song song nhưng không bằng nhau nên hai đường thẳng  $AA'$  và  $BB'$  cắt nhau tại điểm  $O$ .

Gọi  $V$  là phép vị tự tâm  $O$  tỉ số

$$k = \frac{OA'}{OA}$$

thì  $V$  biến điểm  $C$  thành điểm  $C_1$  sao cho:  $A'C_1 \parallel AC, B'C_1 \parallel BC$ .



Hình 32

Suy ra  $C_1$  trùng với  $C'$ , tức là  $V$  cũng biến  $C$  thành  $C'$ . Vậy ta có điều phải chứng minh.

54. Lấy một điểm  $M$  bất kì, nếu  $V_1$  biến  $M$  thành  $M_1$  và  $V_2$  biến  $M_1$  thành  $M_2$  thì  $\overrightarrow{O_1M_1} = k_1 \overrightarrow{O_1M}$  và  $\overrightarrow{O_2M_2} = k_2 \overrightarrow{O_2M_1}$ .

Khi đó, phép hợp thành  $F$  biến  $M$  thành  $M_2$ . Gọi  $I$  là ảnh của  $O_1$  qua phép vị tự  $V_2$ , tức là  $\overrightarrow{O_2I} = k_2 \overrightarrow{O_2O_1}$ .

Khi đó  $\overrightarrow{IM_2} = k_2 \overrightarrow{O_1M_1} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_1M}$ .

a) (h.33)

Nếu  $k_1 k_2 = 1$  thì  $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1 M}$  nên

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1 I} = \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 I} = (1 - k_2) \overrightarrow{O_1 O_2}.$$

Vậy trong trường hợp này  $F$  là phép tịnh tiến theo vectơ

$$\vec{u} = (1 - k_2) \overrightarrow{O_1 O_2}.$$

b) (h.34)

Nếu  $k_1 k_2 \neq 1$  ta chọn điểm  $O_3$  sao cho

$$\overrightarrow{O_3 I} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3 O_1}.$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{O_3 M_2} = \overrightarrow{O_3 I} + \overrightarrow{IM_2}$$

$$= k_1 k_2 \overrightarrow{O_3 O_1} + k_1 k_2 \overrightarrow{O_1 M}$$

$$= k_1 k_2 \overrightarrow{O_3 M}.$$

Vậy  $F$  là phép vị tự tâm  $O_3$  tỉ số  $k_1 k_2$ .

Chú ý rằng tâm  $O_3$  của phép vị tự đó được xác định bởi đẳng thức

$$\overrightarrow{O_3 I} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3 O_1}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{O_3 O_1} + \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 I} = k_1 k_2 \overrightarrow{O_3 O_1}.$$

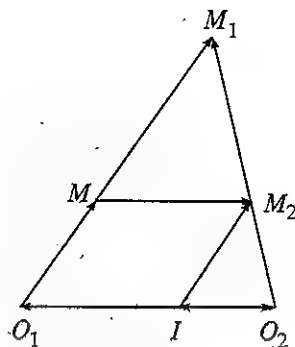
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{O_1 O_2} + k_2 \overrightarrow{O_2 O_1} = (1 - k_1 k_2) \overrightarrow{O_1 O_3}$$

$$\text{do đó } \overrightarrow{O_1 O_3} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{O_1 O_2}.$$

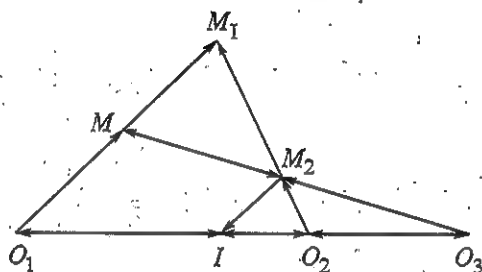
Cũng chú ý rằng tâm của ba phép vị tự  $V_1$ ,  $V_2$  và  $F$  là ba điểm thẳng hàng  $O_1$ ,  $O_2$  và  $O_3$ .

55. Phép vị tự tâm  $O_3^+$  tỉ số  $\frac{R_2}{R_1}$  biến đường tròn  $(I_1; R_1)$  thành đường tròn

$(I_2; R_2)$ ; phép vị tự tâm  $O_1^+$  tỉ số  $\frac{R_3}{R_2}$  biến đường tròn  $(I_2; R_2)$  thành



Hình 33



Hình 34

đường tròn  $(I_3; R_3)$ . Theo câu b) bài 54, phép hợp thành của hai phép vị tự đó là phép vị tự, có tỉ số

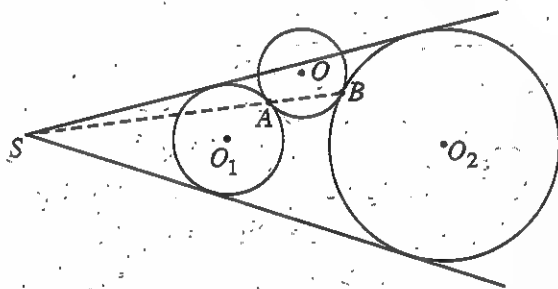
$$\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_3}{R_1}$$

và biến đường tròn  $(I_1; R_1)$  thành đường tròn  $(I_3; R_3)$ . Vậy tâm của phép vị tự hợp thành đó chính là điểm  $O_2^+$ . Suy ra ba điểm  $O_1^+, O_2^+, O_3^+$  thẳng hàng. Chứng minh tương tự cho các bộ ba điểm còn lại.

56. (h.35)

Điểm  $A$  là tâm vị tự trong của  $(O_1)$  và  $(O)$ ,  $B$  là tâm vị tự trong của  $(O)$  và  $(O_2)$ . Nếu gọi  $S$  là tâm vị tự ngoài của  $(O_1)$  và  $(O_2)$  thì theo bài tập 55, đường thẳng  $AB$  đi qua  $S$ .

Nếu thay "tiếp xúc ngoài" bằng "tiếp xúc trong", đường thẳng  $AB$  cũng đi qua  $S$ . (Chứng minh tương tự như trường hợp tiếp xúc ngoài).



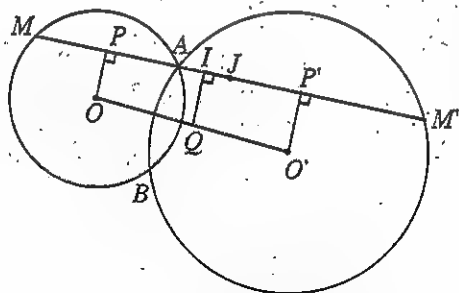
Hình 35

57. (h.36)

a) Gọi  $Q$  là trung điểm của  $OO'$  thì  $QI \perp IA$ . Suy ra quỹ tích  $I$  là đường tròn đường kính  $AQ$ .

b) Vì  $J$  là trung điểm  $MM'$  nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'}) \\ &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} = 2\overrightarrow{AI}. \end{aligned}$$

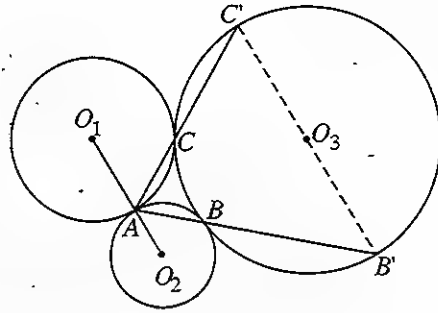


Hình 36

Vậy phép vị tự tâm  $A$  tỉ số 2 biến điểm  $I$  thành điểm  $J$ . Do đó, quỹ tích  $J$  là ảnh của đường tròn đường kính  $AQ$  qua phép vị tự đó.

58. (h.37)

Vì  $B$  là tâm vị tự trong của  $(O_2)$  và  $(O_3)$  nên  $O_2A \parallel O_3B'$ . Vì  $C$  là tâm vị tự trong của  $(O_1)$  và  $(O_3)$  nên  $O_1A \parallel O_3C'$ . Vì ba điểm  $O_1, A, O_2$  thẳng hàng nên  $C', O_3, B'$  thẳng hàng. Như vậy  $B'C'$  là đường kính của đường tròn  $(O_3)$ .



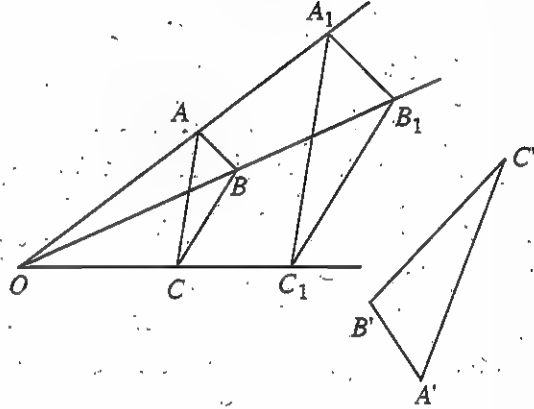
Hình 37

59. (h.38)

Giả sử hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k.$$

Chọn một điểm  $O$  nào đó và xét phép vị tự  $V$  tâm  $O$  tỉ số  $k$  thì  $V$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A_1B_1C_1$ . Dễ thấy rằng hai tam giác  $A_1B_1C_1$  và  $A'B'C'$  bằng nhau. Do đó có phép dời hình  $F$  biến tam giác  $A_1B_1C_1$  thành tam giác  $A'B'C'$ . Suy ra phép hợp thành của  $V$  và  $F$  là phép đồng dạng biến  $ABC$  thành  $A'B'C'$ .



Hình 38

60. a) Chú ý rằng  $\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} = k$

bởi vậy  $F$  biến tam giác  $ABD$  thành tam giác  $CAD$ .

b) Vì  $F$  biến đoạn thẳng  $BA$  thành  $AC$  và vì  $M, N$  lần lượt chia  $BA$  và  $AC$  theo cùng một tỉ số nên  $F$  biến  $M$  thành  $N$ , tức là góc  $(DM, DN)$  bằng góc quay  $\varphi$ .

Vậy tam giác  $DMN$  vuông tại  $D$ .

61. a) Dễ thấy rằng  $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA} = k$

bởi vậy  $F$  biến  $A$  thành  $D$  và biến  $B$  thành  $A$ . Do đó  $F$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $DAC$ .

b) Vì  $F$  biến đoạn thẳng  $AB$  thành  $DA$  nên biến  $M$  thành  $N$ . Bởi vậy, phép  $\mathcal{D}_c$  biến  $CM$  thành  $CN$ , suy ra  $c$  là phân giác của góc  $MCN$ .

62. Dựng tam giác  $AB'C'$  sao cho  $\widehat{A} = \alpha$ ,  $\frac{AB'}{AC'} = k$ .

Gọi  $AB' + B'C' + AC' = m'$ .

Phép vị tự tâm  $A$  tỉ số  $\frac{m}{m'}$  sẽ biến tam giác  $AB'C'$  thành tam giác  $ABC$  cần tìm.

63. Giả sử tam giác  $ABC$  có các đường cao  $AH, BI, CK$  và tam giác  $A'B'C'$  có các đường cao  $A'H', B'I', C'K'$  thoả mãn:  $AH = A'H', BI = B'I', CK = C'K'$ .

Trong tam giác  $ABC$  ta có  $AB \cdot CK = BC \cdot AH = CA \cdot BI$ .

Cũng vậy, trong tam giác  $A'B'C'$  ta có  $A'B' \cdot C'K' = B'C' \cdot A'H' = C'A' \cdot B'I'$ .

Từ đó, suy ra  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ .

Như vậy, hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  đồng dạng. Do đó, có phép đồng dạng  $F$  tỉ số  $k$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$ . Nhưng  $F$  biến đường cao  $AH$  thành đường cao  $A'H'$  với  $A'H' = AH$  nên  $k = 1$ . Do đó  $F$  là phép dời hình. Vậy tam giác  $ABC$  bằng tam giác  $A'B'C'$ .

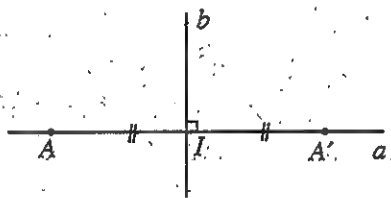
## Bài tập ôn tập chương I

64. (h.39)

Gọi  $a$  là đường thẳng đi qua  $A$  và  $A'$ ,  $b$  là đường thẳng đi qua  $I$  và vuông góc với  $a$ . Theo giả thiết  $F$  biến  $a$  thành chính nó, do đó  $F$  cũng biến  $b$  thành chính nó. Có thể xảy ra hai trường hợp:

– Mỗi điểm của  $b$  biến thành chính nó. Khi đó rõ ràng  $F$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $b$ .

– Mỗi điểm của  $b$  biến thành điểm đối xứng qua  $I$ . Khi đó, tương tự như bài tập 14, ta có thể chứng minh rằng  $F$  là phép đối xứng qua tâm  $I$ .



Hình 39

65. Vì  $F$  không phải là phép đồng nhất nên có điểm  $A$  không trùng với ảnh  $A'$ . Nếu  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $I$  thì theo bài tập 64,  $F$  chính là phép đối xứng trục qua đường thẳng  $d$  đi qua  $I$  và vuông góc với  $AA'$ , hoặc là phép đối xứng qua tâm  $I$  (tức là phép quay tâm  $I$  với góc quay  $180^\circ$ ).

Bây giờ xét trường hợp  $A'$  không đối xứng với  $A$  qua  $I$ , tức là ta có tam giác  $IAA'$ . Gọi  $A''$  là ảnh của  $A'$  qua phép  $F$ . Khi đó,  $F$  biến tam giác  $IAA'$  thành tam giác  $IA'A''$ .

Có thể xảy ra hai trường hợp :

–  $A''$  trùng với  $A$ . Khi đó, nếu gọi  $J$  là trung điểm của  $AA'$  thì  $J$  cũng là trung điểm của  $A'A''$  nên  $F$  biến  $J$  thành  $J$ . Suy ra  $F$  biến mọi điểm của đường thẳng  $IJ$  thành chính nó. Vậy  $F$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $IJ$ .

–  $A''$  không trùng với  $A$ . Khi đó ta có  $IA = IA' = IA''$  và  $(IA, IA') = (IA', IA'')$  nên nếu gọi  $Q$  là phép quay tâm  $I$  góc quay  $\varphi = (IA, IA')$  thì  $Q$  biến tam giác  $IAA'$  thành tam giác  $IA'A''$  nên  $Q$  chính là  $F$ .

66. Vì  $F$  biến  $(O)$  thành chính nó nên  $F$  biến điểm  $O$  thành chính nó. Vậy theo bài tập 64,  $F$  là phép quay tâm  $O$  hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng  $d$  chứa điểm  $O$ .

*Trường hợp  $F$  là phép quay tâm  $O$*

Nếu góc quay là  $180^\circ$  (khi đó  $F$  là phép đối xứng qua điểm  $O$ ) thì hiển nhiên trung điểm của  $MM'$  là  $O$ . Khi đó quỹ tích của trung điểm  $MM'$  là điểm  $O$ . Nếu góc quay khác  $180^\circ$  thì rõ ràng độ dài dây cung  $MM'$  không đổi, do đó quỹ tích của trung điểm  $MM'$  là đường tròn tâm  $O$ .

*Trường hợp  $F$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $d$  (đi qua  $O$ )*

Hiển nhiên trung điểm của  $MM'$  nằm trên  $d$  và do đó quỹ tích trung điểm đó là một đường kính của đường tròn.

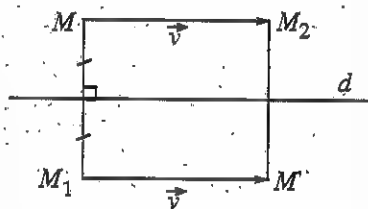
67. a) (h.40)

Giả sử  $M$  là một điểm nào đó,  $D$  biến  $M$  thành  $M_1$  và  $T$  biến  $M_1$  thành  $M'$ . Như vậy, nếu gọi  $F$  là hợp thành của  $T$  và  $D$  thì  $F$  biến  $M$  thành  $M'$ . Nếu ta lấy điểm  $M_2$  sao cho  $MM_1M'M_2$  là hình chữ nhật thì rõ ràng  $T$  biến  $M$  thành  $M_2$  và  $D$  biến  $M_2$  thành  $M'$ . Vậy  $F$  cũng là hợp thành của  $T$  và  $D$ .

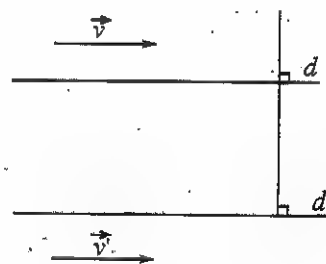
b) Hiển nhiên.

c) (h.41)

Giả sử phép đối xứng trượt  $F$  có trục  $d$  và vectơ trượt  $\vec{v}$ , phép đối xứng trượt  $F'$  có trục đối xứng  $d'$  và vectơ trượt  $\vec{v}$ . Kí hiệu  $D, D'$  lần lượt là phép đối xứng có trục  $d$  và  $d'$ ,  $T$



Hình 40



Hình 41

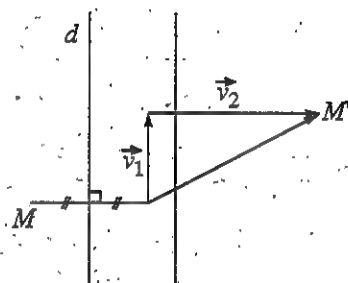


và  $T'$  lần lượt là các phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$  và  $\vec{v}'$ . Như vậy  $F$  là hợp thành của  $T$  và  $D$ ,  $F'$  là hợp thành của  $D'$  và  $T'$ . Suy ra hợp thành của  $F$  và  $F'$  là hợp thành của bốn phép:  $T, D, D'$  và  $T'$ .

Vì  $d \parallel d'$  nên hợp thành của  $D$  và  $D'$  là một phép tịnh tiến. Vậy hợp thành  $F$  và  $F'$  là hợp thành của ba phép tịnh tiến và do đó là một phép tịnh tiến.

d) (h.42)

Gọi  $D$  là phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng  $d$ ,  $T$  là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$ , còn  $F$  là hợp thành của  $D$  và  $T$ . Ta có thể tìm được hai vector  $\vec{v}_1$  và  $\vec{v}_2$  sao cho  $\vec{v}_1$  song song với  $d$ ,  $\vec{v}_2$  vuông góc với  $d$  và  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Nếu ta gọi  $T_1$  và  $T_2$  lần lượt là các phép tịnh tiến theo các vector  $\vec{v}_1$  và  $\vec{v}_2$  thì  $T$  là hợp thành của  $T_2$  và  $T_1$ . Nhưng vì  $\vec{v}_2$  vuông góc với  $d$  nên  $T_2$  có thể xem là

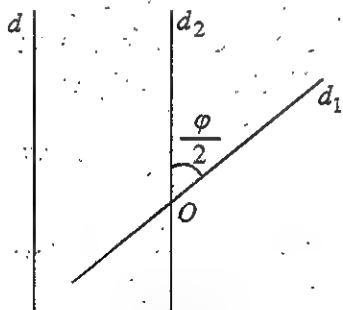


Hình 42

hợp thành của hai phép đối xứng trục  $D_1$  và  $D_2$  có trục song song với  $d$ . Tóm lại,  $F$  là hợp thành của bốn phép  $D, D_1, D_2$  và  $T_1$ . Như đã biết, hợp thành của ba phép đối xứng trục  $D, D_1, D_2$  (có trục song song) là phép đối xứng trục  $D_3$  có trục song song với  $d$ . Vậy  $F$  là hợp thành của  $D_3$  và  $T_1$  với vector tịnh tiến của  $T_1$  song song với trục đối xứng của  $D_3$ , nên  $F$  là phép đối xứng trượt.

e) (h.43)

Giả sử  $Q$  là phép quay tâm  $O$  và  $D$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $d$ ,  $F$  là hợp thành của  $Q$  và  $D$ . Ta có thể xem phép quay  $Q$  là hợp thành của hai phép đối xứng  $D_1$  và  $D_2$  có các trục đối xứng đi qua  $O$ , trong đó trục của  $D_2$  song song với  $d$ . Như vậy  $F$  là hợp thành của ba phép đối xứng:



Hình 43

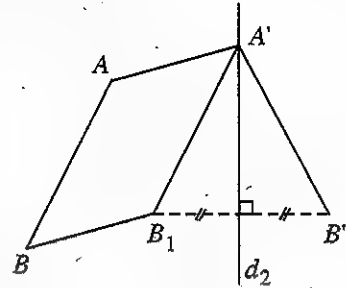
$D_1, D_2$  và  $D$ .

Nhưng hợp thành của  $D_2$  và  $D$  (có trục đối xứng song song) là phép tịnh tiến và do đó  $F$  là hợp thành của một phép đối xứng và một phép tịnh tiến nên theo câu d),  $F$  là phép đối xứng trượt.

g) Suy ra từ câu d) và câu e).

68. (h.44).

Gọi  $T$  là phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ . Khi đó  $T$  biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $B$  thành  $B_1$ . Gọi  $d_2$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $B_1B'$  nếu  $B_1$  khác  $B'$ , còn nếu  $B_1$  trùng  $B'$  thì lấy  $d_2$  là đường thẳng  $A'B'$ . Hiển nhiên khi đó  $d_2$  đi qua  $A'$  và phép đối xứng  $\mathcal{D}_2$  qua đường thẳng  $d_2$  biến  $A'$  thành  $A'$  và biến  $B_1$  thành  $B'$ . Vậy hợp thành  $F$  của  $T$  và  $\mathcal{D}_2$  sẽ biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $B$  thành  $B'$ . Suy ra  $F$  là phép đối xứng trượt.



Hình 44

69. Lấy hai điểm  $A, B$  phân biệt nằm trên  $a$  và gọi  $A' = F(A)$ ,  $B' = F(B)$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AA'$  và  $BB'$ .

*Trường hợp hai điểm  $I$  và  $J$  trùng nhau*

Khi đó, phép đối xứng qua  $I$  biến điểm  $M \in a$  thành điểm  $M_1 \in a'$  sao cho

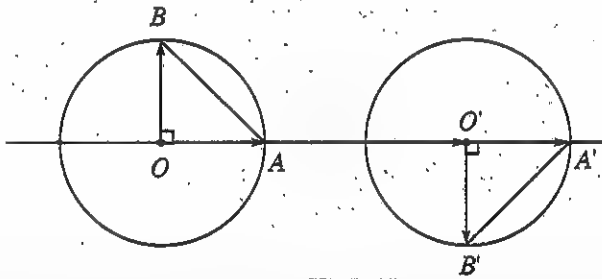
$$M_1A' = MA, M_1B' = MB.$$

Suy ra  $M_1$  trùng  $M' = F(M)$ . Vậy trung điểm  $MM'$  cũng là điểm  $I$ .

*Trường hợp hai điểm  $I, J$  phân biệt*

Ta gọi  $F'$  là phép đối xứng trượt biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $B$  thành  $B'$ . Trục của phép đối xứng trượt chính là đường thẳng  $d$  đi qua  $I$  và  $J$ . Khi đó, với mọi điểm  $M \in a$  ta có  $M' = F'(M) = F(M)$ . Vậy trung điểm các đoạn thẳng  $MM'$  cũng nằm trên  $d$ .

70. (h.45)



Hình 45

a) Vì hai tam giác  $OAB$  và  $O'A'B'$  bằng nhau nên có phép dời hình  $F$  biến  $O$  thành  $O'$ , biến  $A$  thành  $A'$  và biến  $B$  thành  $B'$ . Hiển nhiên  $F$  cũng biến  $(O)$  thành  $(O')$ .

b) Gọi  $f$  là phép đối xứng trượt có trục là  $OO'$  và vectơ trượt là  $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$  thì rõ ràng  $f$  biến  $O, A, B$  lần lượt thành  $O', A', B'$ . Vậy  $f$  trùng với  $F$ . Từ đó, suy ra trung điểm của  $MM'$  luôn luôn nằm trên đường thẳng  $OO'$ .

71. a) Với điểm  $M$  bất kì, nếu  $V$  biến  $M$  thành  $M'$  và  $T$  biến  $M'$  thành  $M''$  thì  $F$  biến  $M$  thành  $M''$ . Bởi vậy  $F$  biến điểm  $I$  thành điểm  $I$  nếu  $V$  biến  $I$  thành  $I'$  và  $T$  biến  $I'$  thành  $I$ , khi đó  $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$  và  $\overrightarrow{I'I} = \vec{v}$ .

$$\text{Từ đó, suy ra } \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI'} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{\vec{v}}{1-k}.$$

Vậy điểm  $I$  hoàn toàn xác định.

- b) Với điểm  $M$  bất kì, nếu  $V$  biến  $M$  thành  $M'$  thì  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ , nếu  $T$  biến  $M'$  thành  $M''$  thì  $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$ . Từ đó, suy ra  $\overrightarrow{OM''} = k\overrightarrow{OM}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} - \overrightarrow{IO} = k(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IO})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{OI}(1-k) = k\overrightarrow{IM}.$$

(\*)

Nhưng từ biểu thức xác định  $I$  ta có  $\overrightarrow{OI}(1-k) = \vec{v}$ .

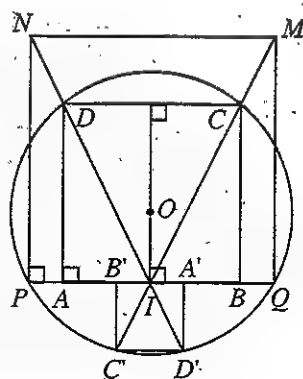
Ngoài ra, vì  $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$  nên  $\overrightarrow{IM''} - \overrightarrow{IM'} = \vec{v}$  hay  $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM''} - \vec{v}$ .

Vậy đẳng thức (\*) trở thành  $\overrightarrow{IM''} = k\overrightarrow{IM}$ .

Do đó, phép  $F$  biến  $M$  thành  $M''$  chính là phép vị tự tâm  $I$  tỉ số  $k$ .

72. (h.46)

Giả sử đã dựng được hình vuông  $ABCD$  thoả mãn điều kiện của bài toán. Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $PQ$  thì  $OI$  là đường trung trực của  $PQ$  nên cũng là đường trung trực của  $DC$  và do đó cũng là đường trung trực của  $AB$ . Từ đó suy ra, nếu dựng hình vuông  $PQMN$  thì có phép vị tự tâm  $I$  biến hình vuông  $PQMN$  thành hình vuông  $ABCD$ .



Hình 46

### Cách dùng

Dựng hình vuông  $PQMN$ . Lấy giao điểm  $C$  và  $C'$  của đường thẳng  $IM$  và đường tròn, lấy giao điểm  $D$  và  $D'$  của  $IN$  và đường tròn (ta kí hiệu sao cho hai điểm  $C, D$  nằm về một phía đối với đường thẳng  $PQ$ ). Gọi các điểm  $B, A, B', A'$  lần lượt là hình chiếu của các điểm  $C, D, C', D'$  trên đường thẳng  $PQ$ . Ta được các hình vuông  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  thoả mãn điều kiện của bài toán.

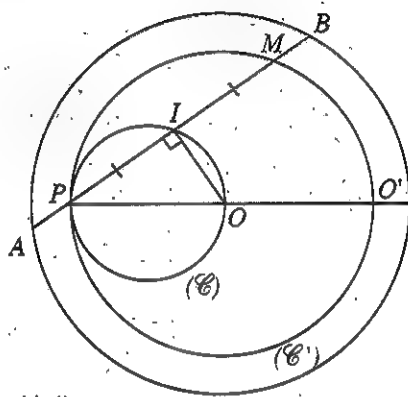
73. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  thì  $\overrightarrow{PI} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$ ,

bởi vậy  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$ .

Gọi  $V$  là phép vị tự tâm  $P$  tỉ số  $k = 2$  thì  $V$  biến điểm  $I$  thành điểm  $M$ .

Vì  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên  $OI \perp AB$ .  
Suy ra quỹ tích của điểm  $I$  là đường tròn  
( $\mathcal{C}$ ) đường kính  $PO$ .

Vậy quỹ tích của điểm  $M$  là đường tròn  $(\mathcal{C}')$  ảnh của  $(\mathcal{C})$  qua phép vị tự  $V$ . Nếu ta lấy  $O'$  sao cho  $\overrightarrow{PO'} = 2\overrightarrow{PO}$  thì  $(\mathcal{C}')$  là đường tròn đường kính  $PO'$ .



Hình 47

74. (h:48)

Trên đoạn thẳng  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho

$$AM = AB = AD.$$

Khi đó, ta có  $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

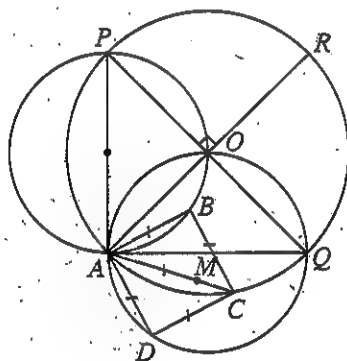
Ngoài ra:  $(AM, AB) = 45^\circ$  và

$$(AM, AD) = -45^\circ.$$

Suy ra, phép vị tự  $V$  tâm  $A$  tỉ số  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

biến điểm  $C$  thành điểm  $M$  và phép quay  $Q$ 

tâm  $A$  góc quay  $45^\circ$  biến điểm  $M$  thành điểm  $B$ . Vậy nếu gọi  $F$  là phép hợp thành của  $V$  và  $Q$  thì  $F$  biến  $C$  thành  $B$ . Vì quỹ tích của  $C$  là đường tròn  $(O)$ , nên quỹ tích của  $B$  là ảnh của đường tròn đó qua phép đồng dạng  $F$ .



Hình 48

Đường tròn quỹ tích của  $B$  có thể xác định như sau :

Gọi  $AR$  là đường kính của  $(O)$  và  $PQ$  là đường kính của  $(O)$  vuông góc với  $AR$  (ta kí hiệu các điểm  $P, Q$  sao cho  $(AR, AP) = 45^\circ$ ). Khi đó dễ thấy rằng phép đồng dạng  $F$  biến  $AR$  thành  $AP$ . Vậy quỹ tích  $B$  là đường tròn đường kính  $AP$ .

Tương tự, ta được quỹ tích  $D$  là đường tròn đường kính  $AQ$ .

### Bài tập trắc nghiệm chương I

- |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. (B).  | 2. (B).  | 3. (D).  | 4. (A).  | 5. (C).  |
| 6. (D).  | 7. (D).  | 8. (C).  | 9. (D).  | 10. (D). |
| 11. (B). | 12. (D). | 13. (D). | 14. (B). | 15. (D). |
| 16. (B). | 17. (D). | 18. (A). | 19. (B). | 20. (B). |
| 21. (C). | 22. (D). | 23. (A). |          |          |

## **ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG**

---

### **A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI**

#### **§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng**

##### **I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN**

###### **1. Các tính chất thừa nhận**

- a) Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.
- b) Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
- c) Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.
- d) Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.
- e) Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

###### **2. Định lí**

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trên mặt phẳng đó.

###### **3. Các điều kiện xác định mặt phẳng**

Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong ba điều kiện sau đây :

- a) Đi qua ba điểm không thẳng hàng ;
- b) Đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó ;
- c) Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

4. Hình chóp có đáy là một đa giác và các mặt bên đều là tam giác có chung một đỉnh (đỉnh của hình chóp).

5. Hình tứ diện ABCD là hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD, trong đó A, B, C, D là bốn điểm không đồng phẳng.

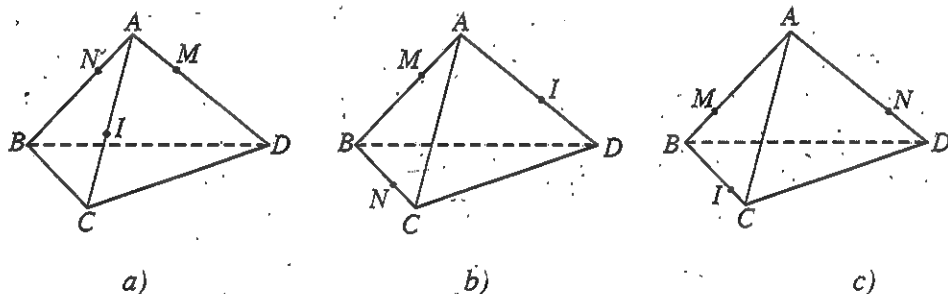
## II - ĐỀ BÀI

1. Chứng minh rằng : Một mặt phẳng và một đường thẳng không nằm trên mặt phẳng đó có không quá một điểm chung.
2. Cho mặt phẳng  $(P)$  và ba điểm  $A, B, C$  nằm ngoài  $\text{mp}(P)$ . Giả sử đoạn thẳng  $AB$  và đoạn thẳng  $BC$  đều cắt  $\text{mp}(P)$ . Chứng minh rằng đoạn thẳng  $AC$  không cắt  $\text{mp}(P)$ .
3. Cho  $n$  điểm ( $n \geq 4$ ) trong đó không có bốn điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng.
4. Cho  $n$  điểm ( $n \geq 4$ ) trong đó bất kì bốn điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng tỏ rằng  $n$  điểm đó đồng phẳng.
5. Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Hai điểm phân biệt  $M, N$  nằm trên đoạn thẳng  $AB$  và hai điểm phân biệt  $I, J$  nằm trên đoạn thẳng  $CD$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $M, N, I, J$  không đồng phẳng.
6. Cho hai điểm cố định  $A, B$  nằm về hai phía của  $\text{mp}(P)$  cố định. Gọi  $M$  là một điểm chuyển động bất kì trong không gian. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng  $MA, MB$  lần lượt cắt  $\text{mp}(P)$  tại hai điểm  $A', B'$  phân biệt thì đường thẳng  $A'B'$  đi qua một điểm cố định.
7. Cho bốn điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Trên đoạn  $BD$  lấy điểm  $P$  sao cho  $BP = 2PD$ .
  - a) Tìm giao điểm của đường thẳng  $CD$  với  $\text{mp}(MNP)$ .
  - b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(ABD)$ .
8. Cho bốn điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ .
  - a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MBC)$  và  $(NDA)$ .
  - b) Cho  $I, J$  là hai điểm lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng  $AB$  và  $AC$ . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MBC)$  và  $(IJD)$ .
9. Cho ba tia  $Ox, Oy, Oz$ . Trên các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt lấy các cặp điểm  $A$  và  $A', B$  và  $B', C$  và  $C'$  sao cho  $BC$  cắt  $B'C'$  tại  $M$ ,  $CA$  cắt  $C'A'$  tại  $N$  và  $AB$  cắt  $A'B'$  tại  $I$ . Chứng minh ba điểm  $M, N, I$  thẳng hàng.
10. Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Gọi  $I, K$  theo thứ tự là hai điểm trong của các tam giác  $ABC$  và  $BCD$ . Giả sử đường thẳng  $IK$  cắt mặt phẳng  $(ACD)$  tại  $J$ . Hãy xác định giao điểm  $J$  đó.
11. Cho bốn điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$ ;  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACD$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, AC, AD$  sao cho

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}.$$

Gọi  $I, J$  lần lượt là các giao điểm của đường thẳng  $MN$  với  $BC$  và  $MP$  với  $BD$ .

- Chứng minh rằng các đường thẳng  $MG, PI, NJ$  đồng phẳng.
  - Gọi  $E, F$  lần lượt là các trung điểm của  $CD, NI$ ;  $H$  là giao điểm của  $MG$  với  $BE$ ;  $K$  là giao điểm của  $GF$  với  $mp(BCD)$ . Chứng minh rằng các điểm  $H, K, I, J$  thẳng hàng.
12. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Trên cạnh  $SC$  lấy một điểm  $E$  không trùng với hai điểm  $S$  và  $C$ .
- Tìm giao điểm  $F$  của đường thẳng  $SD$  với  $mp(ABE)$ .
  - Giả sử  $AB$  không song song với  $CD$ , hãy chứng minh ba đường thẳng  $AB, CD$  và  $EF$  đồng quy.
13. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một hình bình hành,  $O$  là tâm của đáy;  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SC$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M, N$  và  $B$ .
- Tìm giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  với các mặt phẳng  $(SAB), (SBC)$ .
  - Tìm giao điểm  $I$  của đường thẳng  $SO$  với  $mp(P)$  và giao điểm  $K$  của đường thẳng  $SD$  với  $mp(P)$ .
  - Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  với mặt phẳng  $(SAD)$  và mặt phẳng  $(SDC)$ .
  - Xác định các giao điểm  $E, F$  của các đường thẳng  $DA, DC$  với mặt phẳng  $(P)$  và chứng tỏ rằng ba điểm  $E, B, F$  thẳng hàng.
14. Cho tứ diện  $ABCD$ . Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNI)$  trong các trường hợp dưới đây (h.49):



Hình 49

15. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang ( $AB \parallel CD, AB > CD$ ). Gọi  $I, J$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $SB$  và  $SC$ .



- a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng  $SD$  với  $mp(AIJ)$ .
- c) Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi  $mp(AIJ)$ .
16. Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$ ;  $\Delta$  là một đường thẳng nằm trong  $mp(ABCD)$  sao cho  $\Delta$  song song với  $BD$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $SA$ . Hãy xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $mp(M, \Delta)$  trong các trường hợp sau đây :
- a)  $\Delta$  không cắt cạnh nào của đáy  $ABCD$ .
- b)  $\Delta$  đi qua điểm  $C$ .
- c)  $\Delta$  cắt hai cạnh  $BC$  và  $CD$  tại hai điểm  $I$  và  $J$ .
- d)  $\Delta$  cắt hai cạnh  $AB$  và  $AD$  tại hai điểm  $I$  và  $J$ .
17. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $A$  qua điểm  $C$ . Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng đi qua  $B, E$  và một điểm  $F$  trong các trường hợp sau đây :
- a)  $F$  nằm trên đoạn  $CD$  và không trùng với  $C$  và  $D$ .
- b)  $F$  nằm trong tam giác  $ACD$ .
- c)  $F$  nằm trong đoạn thẳng  $DD'$  ( $D'$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ ).
18. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là tứ giác lồi. Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $SA$  và chia đáy hình chóp thành hai phần có diện tích bằng nhau. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi  $mp(P)$ .
19. Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$ ,  $J$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $C$ ,  $K$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $B$ .
- a) Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi  $mp(IJK)$ .
- b) Tính diện tích thiết diện được xác định ở câu a).
20. Cho tứ diện  $ABCD$  thoả mãn điều kiện  $AB.CD = AC.BD = AD.BC$ . Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng quy tại một điểm.
21. Cho tứ diện  $ABCD$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên hai cạnh  $AB$  và  $AC$  sao cho  $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ . Một mặt phẳng  $(P)$  thay đổi luôn chứa  $MN$ , cắt các cạnh  $CD$  và  $BD$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ .
- a) Chứng minh rằng đường thẳng  $EF$  luôn đi qua một điểm cố định.

- b) Tìm tập hợp giao điểm  $I$  của  $ME$  và  $NF$ .
- c) Tìm tập hợp giao điểm  $J$  của  $MF$  và  $NE$ .

## §2. Hai đường thẳng song song

### I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.
2. Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng.
3. Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng  
Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.
4. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).
5. Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm  $G$  của mỗi đoạn. Điểm  $G$  đó gọi là trọng tâm của tứ diện.
6. Một mặt phẳng được xác định nếu nó đi qua hai đường thẳng song song.

### II – ĐỀ BÀI

22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
  - a) Có thể tìm được hai đường thẳng song song cùng cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước.
  - b) Có thể tìm được hai đường thẳng cắt nhau cùng cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước.
  - c) Không thể tìm được hai đường thẳng song song hoặc hai đường thẳng cắt nhau cùng cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước.
23. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một tứ giác lồi. Chứng minh rằng các cặp đường thẳng sau đây chéo nhau :  $SA$  và  $BC$  ;  $SA$  và  $CD$  ;  $SB$  và  $CD$  ;  $SB$  và  $DA$  ;  $SC$  và  $AD$  ;  $SC$  và  $AB$  ;  $SD$  và  $AB$  ;  $SD$  và  $BC$ .

24. Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có  $AD$  cắt  $BC$ . Hãy tìm điểm  $M$  nằm trên cạnh  $SD$  và điểm  $N$  trên cạnh  $SC$  sao cho  $AM \parallel BN$ .
25. Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là một tứ giác lồi. Gọi  $M, N, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh bên  $SA, SB, SC$  và  $SD$ . Chứng minh rằng :
- $ME \parallel AC, NF \parallel BD$  ;
  - Ba đường thẳng  $ME, NF$  và  $SO$  ( $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ) đồng quy ;
  - Bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng.
26. Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật. Gọi  $M, N, E, F$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $SAB, SBC, SCD$  và  $SDA$ . Chứng minh rằng :
- Bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng ;
  - Tứ giác  $MNEF$  là hình thoi ;
  - Ba đường thẳng  $ME, NF$  và  $SO$  đồng quy ( $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ).
27. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $BD$  ;  $E$  là một điểm thuộc cạnh  $AD$  khác với  $A$  và  $D$ .
- Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi  $mp(IJE)$ .
  - Tìm vị trí của điểm  $E$  trên  $AD$  sao cho thiết diện là hình bình hành.
  - Tìm điều kiện của tứ diện  $ABCD$  và vị trí của điểm  $E$  trên cạnh  $AD$  để thiết diện là hình thoi.
28. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một tứ giác lồi. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $SAB$  và  $SAD$  ;  $E$  là trung điểm của  $CB$ .
- Chứng minh rằng  $MN \parallel BD$ .
  - Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $mp(MNE)$ .
  - Gọi  $H$  và  $L$  lần lượt là các giao điểm của  $mp(MNE)$  với các cạnh  $SB$  và  $SD$ . Chứng minh rằng  $LH \parallel BD$ .
29. Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng :
- Các đoạn thẳng đi qua mỗi đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm  $G$  và điểm  $G$  chia trong mỗi đoạn thẳng đó theo tỉ lệ  $3 : 1$  kể từ đỉnh đến trọng tâm của mặt đối diện ;
  - Điểm  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .
30. Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $CD$  và  $AB$ .

- a) Hãy xác định điểm  $I \in AC, J \in DN$  sao cho  $IJ \parallel BM$ .
- b) Tính độ dài đoạn thẳng  $IJ$  theo  $a$ .
31. Cho tứ diện  $ABCD$  và bốn điểm  $M, N, E, F$  lần lượt nằm trên các cạnh  $AB, BC, CD$  và  $DA$ . Chứng minh rằng :
- a) Nếu bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng thì  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$  ;
- b) Nếu  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$  thì bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng.
32. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành.  $M$  là trung điểm của  $SC$ ,  $N$  là trung điểm của  $OB$  ( $O$  là giao điểm của  $BD$  và  $AC$ ).
- a) Tìm giao điểm  $I$  của  $SD$  và mặt phẳng  $(AMN)$ .
- b) Tính tỉ số  $\frac{SI}{ID}$ .

### §3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

#### I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
2. Một đường thẳng (không nằm trên  $mp(P)$ ) song song với  $mp(P)$  khi và chỉ khi nó song song với một đường thẳng nằm trong  $(P)$ .
3. Nếu  $mp(Q)$  đi qua đường thẳng  $a$  (mà  $a$  song song với  $mp(P)$ ) thì giao tuyến của  $mp(P)$  và  $mp(Q)$  (nếu có) song song với  $a$ .
4. Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.
5. Một mặt phẳng được xác định nếu nó đi qua đường thẳng  $a$  và song song với đường thẳng  $b$  trong đó  $b$  và  $a$  chéo nhau.

#### II - ĐỀ BÀI

33. Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi  $O, O'$  lần lượt là tâm của các hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$ ;  $G_1, G_2$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABD$  và  $ABE$ . Chứng minh rằng :

- a)  $OO'$  song song với các mặt phẳng  $(ADF)$  và  $(BCE)$  ;
- b)  $G_1G_2$  song song với mặt phẳng  $(CEF)$ .
34. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là một điểm thuộc cạnh  $CD$  không trùng với  $C$  và  $D$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $MN$  và song song với  $BC$ .
- a) Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi  $mp(P)$ .
- b) Xác định vị trí của điểm  $N$  trên  $CD$  sao cho thiết diện là một hình bình hành.
35. Cho tứ diện  $ABCD$ . Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  trong mỗi trường hợp sau :
- a) Mặt phẳng  $(P)$  đi qua trọng tâm  $G$  của tứ diện, qua điểm  $E$  thuộc cạnh  $BC$  và song song với  $AD$ .
- b) Đi qua trọng tâm của tứ diện và song song với  $BC$  và  $AD$ .
36. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SC$  ;  $(P)$  là mặt phẳng qua  $AM$  và song song với  $BD$ .
- a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi  $mp(P)$ .
- b) Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  với các cạnh  $SB$  và  $SD$ . Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác  $SME$  với tam giác  $SBC$  và tỉ số diện tích của tam giác  $SMF$  với tam giác  $SCD$ .
- c) Gọi  $K$  là giao điểm của  $ME$  với  $CB$ ,  $J$  là giao điểm của  $MF$  với  $CD$ . Hãy chứng minh ba điểm  $K, A, J$  nằm trên một đường thẳng song song với  $EF$  và tìm tỉ số  $\frac{EF}{KJ}$ .
37. Cho hình chóp  $SABCD$ . Một mặt phẳng  $(P)$  cắt các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ .
- a) Tìm điều kiện của  $mp(P)$  để tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình thang.
- b) Tìm điều kiện của  $mp(P)$  để tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.
38. Cho tứ diện  $ABCD$ . Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABD$ , điểm  $I$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BI = 2IC$ . Chứng minh rằng  $IG$  song song với mặt phẳng  $(ACD)$ .
39. Cho tứ diện  $ABCD$ . Một mặt phẳng  $(P)$  di động luôn song song với  $AB$  và  $CD$  lần lượt cắt các cạnh  $AC, AD, BD, BC$  tại  $M, N, E, F$ .
- a) Chứng minh rằng tứ giác  $MNEF$  là một hình bình hành.
- b) Tìm tập hợp tâm  $I$  của hình bình hành  $MNEF$ .

## §4. Hai mặt phẳng song song

### I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
2. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).
3. Qua một điểm ngoài một mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
4. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).
5. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.
6. Định lí Ta-lét : Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
7. Định lí Ta-lét đảo : Giả sử trên hai đường thẳng a và a' chéo nhau lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

8. Hình lăng trụ có hai đáy là hai đa giác nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình bình hành ; các cạnh bên bằng nhau và đôi một song song.

9. Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành ; bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.

10. Hình chóp cụt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình thang ; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

### II - ĐỀ BÀI

40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- a) Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.

- b) Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng còn lại.
- c) Các mặt đối diện của một hình hộp nằm trên những mặt phẳng song song.
41. Cho hai mặt phẳng song song  $(P)$  và  $(Q)$ ; hai đường thẳng song song  $a$  và  $b$ . Đường thẳng  $a$  lần lượt cắt  $(P)$ ,  $(Q)$  tại  $A, A'$ ; đường thẳng  $b$  lần lượt cắt  $(P)$ ,  $(Q)$  tại  $B, B'$ . Chứng minh rằng hai đoạn thẳng  $AA'$  và  $BB'$  bằng nhau.
42. Cho một mặt phẳng  $(P)$  và một điểm  $A$  nằm ngoài  $(P)$ . Chứng minh rằng tất cả những đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $(P)$  đều cùng nằm trong một mặt phẳng  $(Q)$  song song với  $(P)$ .
43. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một tứ giác lồi.  $M$  là trung điểm của cạnh bên  $SA$ ,  $N$  là trung điểm của cạnh bên  $SC$ .
- a) Xác định các thiết diện của hình chóp khi cắt bởi các mặt phẳng lần lượt qua  $M, N$  và song song với  $mp(SBD)$ .
- b) Gọi  $I, J$  là giao điểm của hai mặt phẳng nói trên với  $AC$ . Chứng minh rằng  $IJ = \frac{1}{2}AC$ .
44. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng  $(P)$  cắt các cạnh bên  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Chứng minh rằng tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng  $(P)$  song song với  $mp(ABCD)$ .
45. Cho hình chóp  $S.ABC$ . Các điểm  $I, J, K$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $SAB, SBC, SCA$ .
- a) Chứng minh rằng  $(IJK) \parallel (ABC)$ .
- b) Tìm tập hợp các điểm  $M$  nằm trong hình chóp  $S.ABC$  sao cho  $KM$  song song với  $mp(ABC)$ .
46. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang ( $AB \parallel CD$ ). Điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  không trùng với  $B$  và  $C$ .
- a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  và song song với  $mp(SAB)$ . Thiết diện là hình gì?
- b) Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là giao điểm của  $mp(P)$  với  $SD$  và  $SC$ . Chứng minh rằng giao điểm  $I$  của  $NE$  và  $MF$  chạy trên một đường thẳng cố định.
47. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Một mặt phẳng qua  $IJ$  cắt các cạnh  $AD$  và  $BC$  lần lượt tại  $N$  và  $M$ .

- a) Cho trước điểm  $M$ , nêu cách dựng điểm  $N$ .
- b) Gọi  $K$  là giao điểm của  $MN$  và  $IJ$ . Chứng minh rằng  $K$  là trung điểm của  $MN$ .
48. Cho tứ diện  $ABCD$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt thay đổi trên hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Tìm tập hợp trung điểm  $I$  của  $MN$ .
49. Hãy dùng định lý Ta-lét để giải bài tập 31 (chương II).
50. Cho tứ diện  $ABCD$ . Hãy dựng một hình hộp ngoại tiếp tứ diện đó (tức là dựng một hình hộp sao cho mỗi cạnh của tứ diện là đường chéo của một mặt của hình hộp).
51. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên  $AD', DB$  sao cho  $AM = DN = x$  ( $0 < x < a\sqrt{2}$ ).
- a) Chứng minh rằng khi  $x$  biến thiên, đường thẳng  $MN$  luôn song song với một mặt phẳng cố định.
- b) Chứng minh rằng khi  $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$  thì  $MN \parallel A'C$ .
52. Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Gọi  $O_1$  là tâm của hình bình hành  $A_1B_1C_1D_1$ ;  $K$  là trung điểm của  $CD$ ;  $E$  là trung điểm của  $BO_1$ .
- a) Chứng minh rằng  $E$  nằm trên  $mp(ACB_1)$ .
- b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  qua điểm  $K$  và song song với mặt phẳng  $(EAC)$ .
53. Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Trên đường thẳng  $BA$  lấy một điểm  $M$  sao cho  $A$  nằm giữa  $B$  và  $M$ ,  $MA = \frac{1}{2}AB$ .
- a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  qua  $M, B'$  và trung điểm  $E$  của  $AC$ .
- b) Tính tỉ số  $\frac{BD}{CD}$  ( $D = BC \cap mp(MB'E)$ ).
54. Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là tâm của các hình bình hành  $ACC'A', BCC'B', ABB'A'$ .
- a) Chứng minh rằng:  $IJ \parallel (ABB'A'), JK \parallel (ACC'A'), IK \parallel (BCC'B')$ .
- b) Ba đường thẳng  $AJ, CK, BI$  đồng quy tại một điểm  $O$ .
- c) Mặt phẳng  $(IJK)$  song song với mặt đáy của hình lăng trụ.



- d) Gọi  $G, G'$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng ba điểm  $G, O, G'$  thẳng hàng.
55. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $AD$ , điểm  $N$  thuộc cạnh  $D'C'$  sao cho  $AM : MD = D'N : NC'$ .
- Chứng minh rằng  $MN$  song song với  $(C'BD)$ .
  - Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp( $P$ ) qua  $MN$  và song song với mp( $C'BD$ ).
56. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $P, Q, R, S$  lần lượt là tâm các mặt bên  $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$ .
- Chứng minh rằng  $RQ$  song song với  $(ABCD)$ ,  $(PQRS)$  song song  $(ABCD)$ .
  - Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng  $(AQR)$ .
  - Gọi  $M$  là giao điểm của cạnh  $CC'$  với mp( $AQR$ ). Tính tỉ số  $\frac{MC}{MC'}$ .
57. Cho hình chóp cụt tứ giác  $ABCD.A'B'C'D'$ , có các cạnh bên là  $AA', BB', CC', DD'$  và có đáy lớn  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $AD'$  và  $BC'$ ,  $CB'$  và  $DA'$ ,  $BA'$  và  $CD'$ ,  $AB'$  và  $DC'$ . Chứng minh bốn điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

## §5. Phép chiếu song song

### I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Phép chiếu song song lên một mặt phẳng ( $P$ ) theo phương  $l$  (cắt mặt phẳng ( $P$ )) là phép đặt tương ứng mỗi điểm  $M$  trong không gian với điểm  $M'$  của mặt phẳng ( $P$ ) sao cho  $MM'$  song song hoặc trùng với  $l$ .
- Phép chiếu song song theo phương  $l$ 
  - Bảo toàn sự thẳng hàng và thứ tự thẳng hàng của các điểm.
  - Biến hai đường thẳng song song (nhưng không song song với  $l$ ) thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
  - Bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.
- Hình biểu diễn của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó lên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
- Hình biểu diễn của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều, thường là một tam giác bất kì.

5. Hình biểu diễn của hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông thường là một hình bình hành.
6. Hình biểu diễn của một hình thang thường là một hình thang.
7. Hình biểu diễn của đường tròn thường là đường elip hoặc đường tròn.

## II - ĐỀ BÀI

58. Cho tam giác  $ABC$ . Hãy chọn mặt phẳng chiếu  $(P)$  và phương chiếu  $l$  để hình chiếu của tam giác  $ABC$  trên  $(P)$  là :
  - a) Một tam giác cân ;
  - b) Một tam giác đều ;
  - c) Một tam giác vuông.
59. Vẽ hình chiếu của tứ diện  $ABCD$  lên một mặt phẳng  $(P)$  theo phương chiếu  $AB$  ( $AB$  không song song với  $(P)$ ).
60. Vẽ hình chiếu của hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  lên một mặt phẳng  $(P)$  theo phương chiếu  $AC_1$  ( $AC_1$  không song song với  $(P)$ ).
61. Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện đều.
62. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trên các cạnh  $AA'$ ,  $BC$  lần lượt lấy các điểm  $M$  và  $N$  không trùng với các đỉnh của hình hộp. Trong hình bình hành  $A'B'C'D'$  lấy một điểm  $P$ . Hãy xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi  $mp(MNP)$ .
63. Cho hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  chéo nhau. Trên  $d$  đặt hai đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau  $AB$  và  $BC$  ( $B$  ở giữa  $A$  và  $C$ ) ; trên  $d'$  đặt hai đoạn thẳng liên tiếp cũng bằng nhau  $A'B'$  và  $B'C'$  ( $B'$  ở giữa  $A'$  và  $C'$ ). Chứng minh rằng  $AA' + CC' > 2BB'$ .
64. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $CD$  và  $CC'$ .
  - a) Xác định đường thẳng  $\Delta$  qua  $M$  cắt  $AN$  và cắt  $A'B$ .
  - b) Gọi  $I$ ,  $J$  lần lượt là giao điểm của  $\Delta$  với  $AN$  và  $A'B$ . Hãy tìm tỉ số  $\frac{IM}{IJ}$ .
65. Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ .
  - a) Hãy xác định đường thẳng  $\Delta$  cắt cả hai đường thẳng  $AC_1$  và  $BA_1$  đồng thời song song với  $B_1D_1$ .

- b) Gọi  $I, J$  lần lượt là giao điểm của  $\Delta$  với  $AC_1$  và  $BA_1$ . Tính tỉ số  $\frac{AI}{AC_1}$ .
66. Hãy xác định thiết diện của hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  khi cắt bởi mặt phẳng qua ba điểm  $M, N, P$  tương ứng là ba điểm trong của ba mặt bên :
- a)  $(ABCD), (ABB'A'), (ADD'A')$ ;  
b)  $(ABCD), (A'B'C'D'), (ABB'A')$ .
67. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau không cùng song song với một mặt phẳng và một điểm  $G$  không nằm trên bất cứ đường nào trong ba đường thẳng đó. Hãy dựng tam giác có các đỉnh thứ tự nằm trên ba đường thẳng đã cho và nhận  $G$  làm trọng tâm.



## Bài tập ôn tập chương II

68. Chứng minh rằng nếu  $n$  đường thẳng ( $n \geq 3$ ) đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.
69. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang ( $AB \parallel CD, AB > CD$ ). Gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ ;  $M$  là trung điểm của  $AB$ ;  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ECD$ .
- a) Chứng minh rằng các điểm  $S, E, M, G$  cùng thuộc một mặt phẳng và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$  theo cùng một đường thẳng  $\Delta$ .
- b) Gọi  $C_1$  và  $D_1$  là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh  $SC, SD$  sao cho  $AD_1$  và  $BC_1$  cắt nhau tại  $K$ . Chứng minh các điểm  $S, K, E$  thẳng hàng và giao điểm  $O_1$  của  $AC_1$  với  $BD_1$  thuộc  $\Delta$ .
70. Trong  $\text{mp}(P)$ , cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $O$ . Hai điểm  $A, B$  nằm ngoài  $\text{mp}(P)$  và đường thẳng  $AB$  cắt  $\text{mp}(P)$  tại  $C$  sao cho  $C \notin a, C \notin b$ . Một mặt phẳng  $(Q)$  thay đổi luôn đi qua  $AB$  và cắt hai đường thẳng  $a, b$  lần lượt tại  $A_1$  và  $B_1$ .
- a) Chứng minh rằng đường thẳng  $A_1B_1$  luôn đi qua một điểm cố định.
- b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AA_1$  và  $BB_1$ ,  $J$  là giao điểm của  $AB_1$  và  $BA_1$ . Chứng minh rằng mỗi điểm  $I$  và  $J$  chạy trên một đường thẳng cố định.
- c) Chứng minh rằng đường thẳng  $IJ$  luôn đi qua một điểm cố định.

71. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một tứ giác lồi. Gọi  $M, I, J, O$  lần lượt là trung điểm của  $SD, AB, CD, IJ$ .
- Chứng minh rằng nếu  $G_1, G_2$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $SAB$  và  $ABC$  thì  $G_1G_2 \parallel MJ$ .
  - Chứng minh rằng tám đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh hình chóp và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh hình chóp không nằm trên cùng một mặt phẳng đồng quy tại một điểm  $G$ .
  - Chứng minh rằng điểm  $G$  nằm trên đoạn thẳng  $SO$  và  $GS = 4GO$ .
72. Cho hình chóp  $S.ABC$  và một điểm  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$ . Các đường thẳng qua  $M$  lần lượt song song với các đường thẳng  $SA, SB, SC$  cắt các mặt phẳng  $(SBC), (SCA), (SAB)$  tại  $A', B', C'$ .
- Gọi  $N$  là giao điểm của  $SA'$  với  $BC$ . Chứng minh rằng các điểm  $A, M, N$  thẳng hàng và từ đó suy ra cách dựng điểm  $A'$ .
  - Chứng minh rằng  $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{MA'}{SA}$ ;
  - Chứng minh rằng  $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$ .
73. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng  $(P)$  lần lượt cắt các cạnh  $SA, SB, SC$  tại  $A', B', C'$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ;  $I$  là giao điểm của  $A'C'$  và  $SO$ .
- Tìm giao điểm  $D'$  của mp $(P)$  với cạnh  $SD$ .
  - Chứng minh rằng  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2SO}{SI}$ .
  - Chứng minh rằng  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$ .
74. Cho tứ diện  $ABCD$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với cả  $AC$  và  $BD$  cắt các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt tại các điểm  $P, Q, R, S$ .
- Chứng minh rằng tứ giác  $PQRS$  là hình bình hành.
  - Xác định vị trí của điểm  $P$  trên cạnh  $AB$  để tứ giác  $PQRS$  là hình thoi.

75. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một tứ giác lồi. Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ ;  $M$  là trung điểm của cạnh  $SA$ .
- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$ , song song với  $SO$  và  $BC$ .
  - Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(Q)$  qua  $O$ , song song với  $BM$  và  $SD$ .
76. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang ( $AD \parallel BC, AD > BC$ ). Gọi  $M, N, E$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD, SA$ .
- Chứng minh rằng:  $MN \parallel (SBC)$ ;  $(MEN) \parallel (SBC)$ .
  - Trong tam giác  $SAD$  vẽ  $EF \parallel AD$  ( $F \in SD$ ). Chứng minh rằng  $F$  là giao điểm của mặt phẳng  $(MNE)$  với  $SD$ . Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp $(MNE)$  là hình gì?
  - Chứng minh rằng  $SC \parallel (MNE)$ . Đường thẳng  $AF$  có song song với mp $(SBC)$  hay không?
  - Cho  $M, N$  là hai điểm cố định lần lượt nằm trên các cạnh  $AB, CD$  sao cho  $MN \parallel AD$  và  $E, F$  là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh  $SA, SD$  sao cho  $EF \parallel AD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $ME$  và  $NF$  thì  $I$  di động trên đường nào?
77. Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ .
- Chứng minh rằng đường chéo  $B_1D$  cắt mp $(A_1BC_1)$  tại điểm  $G$  sao cho  $B_1G = \frac{1}{2}GD$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $A_1BC_1$ .
  - Chứng minh rằng  $(D_1AC) \parallel (BA_1C_1)$  và trọng tâm  $G'$  của tam giác  $D_1AC$  cũng nằm trên  $B_1D$  và  $B_1G' = \frac{2}{3}B_1D$ .
  - Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là các điểm đối xứng của điểm  $B_1$  qua  $A, D_1$  và  $C$ . Chứng minh rằng  $(PQR) \parallel (BA_1C_1)$ .
  - Chứng minh rằng  $D$  là trọng tâm tứ diện  $B_1PQR$ .

## Bài tập trắc nghiệm chương II

- Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
  - Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì đồng quy ;
  - Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì đồng phẳng ;

- (C) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không đồng phẳng thì đồng quy ;  
(D) Ba đường thẳng đồng quy thì đồng phẳng.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- (A) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng ;  
(B) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng ;  
(C) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì cả ba đường thẳng đó đồng phẳng ;  
(D) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng chéo nhau thì ba đường thẳng đó đồng phẳng.

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- (A) Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau ;  
(B) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau ;  
(C) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ;  
(D) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

4. Cho hai đường thẳng song song  $a$  và  $b$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- (A) Nếu mặt phẳng  $(P)$  cắt  $a$  thì cũng cắt  $b$  ;  
(B) Nếu mặt phẳng  $(P)$  song song với  $a$  thì cũng song song với  $b$  ;  
(C) Nếu mặt phẳng  $(P)$  song song với  $a$  thì mặt phẳng  $(P)$  hoặc song song với  $b$  hoặc mặt phẳng  $(P)$  chứa  $b$  ;  
(D) Nếu mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $a$  thì cũng có thể chứa đường thẳng  $b$ .

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- (A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau ;  
(B) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại ;  
(C) Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại ;  
(D) Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- (A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì song song với nhau ;

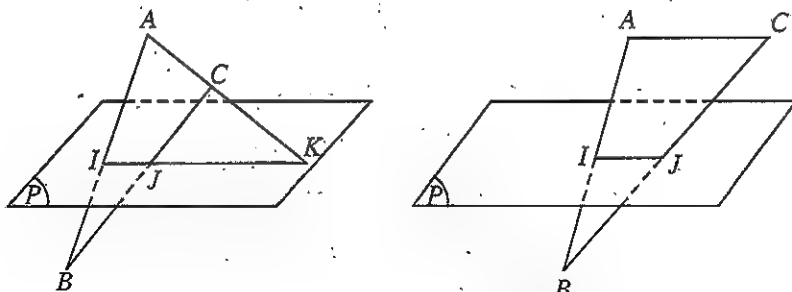
- (B) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau ;
- (C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau ;
- (D) Các mệnh đề trên đều sai.
7. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA, AC$  và  $BD$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Hai đường thẳng  $RS$  và  $PQ$  cắt nhau ;
- (B) Hai đường thẳng  $NR$  và  $PQ$  song song với nhau ;
- (C) Hai đường thẳng  $MN$  và  $PQ$  song song với nhau ;
- (D) Hai đường thẳng  $RS$  và  $MP$  chéo nhau.
8. Với giả thiết như bài 7, hãy cho biết trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Ba đường thẳng  $MQ, RS, NP$  đôi một song song ;
- (B) Ba đường thẳng  $MP, NQ, RS$  đồng quy ;
- (C) Ba đường thẳng  $NQ, SP, RS$  đồng phẳng ;
- (D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.
9. Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cắt nhau theo giao tuyến  $\Delta$ . Hai đường thẳng  $p$  và  $q$  lần lượt nằm trong  $(P)$  và  $(Q)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A)  $p$  và  $q$  cắt nhau ;
- (B)  $p$  và  $q$  chéo nhau ;
- (C)  $p$  và  $q$  song song ;
- (D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.
10. Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $G, G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $ABD$ . Diện tích của thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng  $(BGG')$  là
- (A)  $\frac{a^2\sqrt{11}}{3}$  ;
- (B)  $\frac{a^2\sqrt{11}}{6}$  ;
- (C)  $\frac{a^2\sqrt{11}}{8}$  ;
- (D)  $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$  .
11. Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Kết quả nào sau đây là đúng ?

- (A)  $AD \parallel (BEF)$ ; (B)  $(AFD) \parallel (BEC)$ ;  
 (C)  $(ABD) \parallel (EFC)$ ; (D)  $EC \parallel (ABF)$ .
12. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA, SB, SC, SD$ . Một mặt phẳng  $(P)$  thay đổi qua  $A'$  và song song với  $AC$  luôn đi qua một đường thẳng cố định là  
 (A) Đường thẳng  $A'B'$ ; (B) Đường thẳng  $A'D'$ ;  
 (C) Đường thẳng  $A'C'$ ; (D) Đường thẳng  $A'B$ .
13. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một hình bình hành. Một mặt phẳng  $(P)$  đồng thời song song với  $AC$  và  $SB$  lần lượt cắt các đoạn thẳng  $SA, AB, BC, SC, SD$  và  $BD$  tại  $M, N, E, F, I, J$ . Khi đó ta có  
 (A) Ba đường thẳng  $NE, AC, MF$  đôi một cắt nhau;  
 (B) Ba đường thẳng  $NE, AC, MF$  đôi một song song;  
 (C) Ba đường thẳng  $NE, AC, MF$  đồng phẳng;  
 (D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.
14. Với giả thiết của bài 13, ta có  
 (A)  $MN \parallel (SCD)$ ; (B)  $EF \parallel (SAD)$ ;  
 (C)  $NF \parallel (SAD)$ ; (D)  $IJ \parallel (SAB)$ .

## B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### §1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

- Giả sử  $(P)$  là một mặt phẳng và  $a$  là một đường thẳng sao cho  $a$  không nằm trên  $(P)$ . Nếu  $(P)$  và  $a$  có ít nhất hai điểm chung phân biệt thì theo định lý mặt phẳng  $(P)$  sẽ chứa  $a$  (trái với giả thiết).
- Giả sử  $I = AB \cap mp(P), J = BC \cap mp(P)$ .



Hình 50

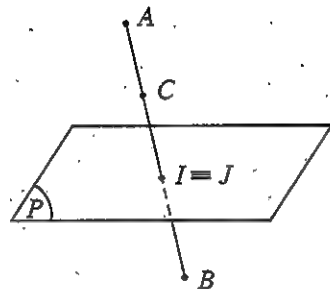


Trường hợp ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng (h.50)

Xét  $mp(ABC)$  và đường thẳng  $IJ$  ta có  $IJ \subset (ABC)$ . Theo giả thiết  $A, B$  nằm khác phía đối với đường thẳng  $IJ$  và  $B, C$  cũng nằm khác phía đối với đường thẳng  $IJ$ . Vậy  $A, C$  nằm về một phía của đường thẳng  $IJ$ , nghĩa là đoạn thẳng  $AC$  không cắt  $mp(P)$ .

Trường hợp ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng (h.51)

Khi đó, điểm  $J$  trùng với điểm  $I$ ; hai điểm  $A, C$  nằm về một phía đối với điểm  $J$  trên đường thẳng qua  $A, B, C$ , nghĩa là  $A$  và  $C$  nằm về một phía đối với  $mp(P)$ . Vậy đoạn thẳng  $AC$  không cắt mặt phẳng  $(P)$ .



Hình 51

- Giả sử có ba điểm  $A, B, C$  của  $n$  điểm đã cho thẳng hàng. Khi đó bốn điểm  $A, B, C, D$  nào cũng đồng phẳng (mâu thuẫn với giả thiết). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Giả sử  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  điểm đã cho.

Nếu chúng thẳng hàng thì rõ ràng chúng đồng phẳng.

Nếu chúng không thẳng hàng thì tồn tại ba điểm không thẳng hàng (chẳng hạn  $A_1, A_2, A_3$ ). Qua ba điểm đó ta có  $mp(A_1A_2A_3)$ . Khi đó vì bốn điểm nào của  $n$  điểm đã cho cũng đồng phẳng nên các điểm  $A_i, i \geq 4$  đều nằm trong  $mp(A_1A_2A_3)$ .

- Giả sử có  $mp(P)$  chứa bốn điểm  $M, N, I, J$ . Khi đó

$$M \in (P), N \in (P) \Rightarrow MN \subset (P) \Rightarrow A \in (P), B \in (P)$$

$$\text{và } I \in (P), J \in (P) \Rightarrow IJ \subset (P) \Rightarrow C \in (P), D \in (P)$$

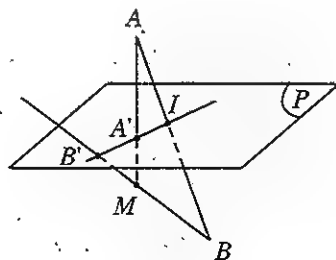
nên  $A, B, C, D$  đều thuộc  $(P)$  (trái giả thiết). Suy ra điều phải chứng minh.

- (h.52)

Vì  $A$  và  $B$  nằm về hai phía đối với  $mp(P)$  nên đường thẳng  $AB$  cắt  $(P)$  tại một điểm  $I$ . Khi đó  $I$  cố định.

Nếu  $M$  nằm trên đường thẳng  $AB$  thì  $A' \equiv B' \equiv I$ .

Nếu  $M$  không nằm trên đường thẳng  $AB$  thì có  $mp(MAB)$ . Khi đó



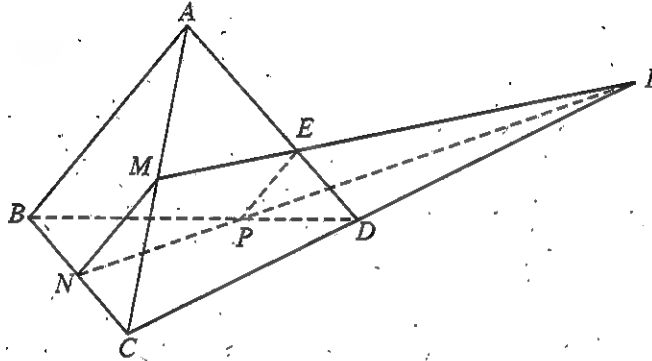
Hình 52

$$\left. \begin{aligned} A' &\in AM, AM \subset mp(MAB) \Rightarrow A' \in mp(MAB) \\ B' &\in BM, BM \subset mp(MAB) \Rightarrow B' \in mp(MAB) \\ I &\in AB, AB \subset mp(MAB) \Rightarrow I \in mp(MAB). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Mặt khác, các điểm  $A', B', I$  đều thuộc  $mp(P)$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm  $A', B', I$  thẳng hàng, tức là đường thẳng  $A'B'$  đi qua điểm cố định  $I$ .

7. (h.53)



Hình 53

a) Xét  $mp(BCD)$ , ta có  $\frac{BN}{BC} \neq \frac{BP}{BD}$ . Suy ra đường thẳng  $NP$  cắt đường thẳng  $CD$  tại một điểm  $I$ . Điểm  $I$  thuộc  $CD$  và cũng thuộc  $mp(MNP)$  nên  $I$  chính là giao điểm của  $CD$  và  $mp(MNP)$ .

b) Gọi  $E$  là giao điểm của đường thẳng  $MI$  và  $AD$ . Khi đó, rõ ràng  $E$  và  $P$  là hai điểm chung của hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(ABD)$ .

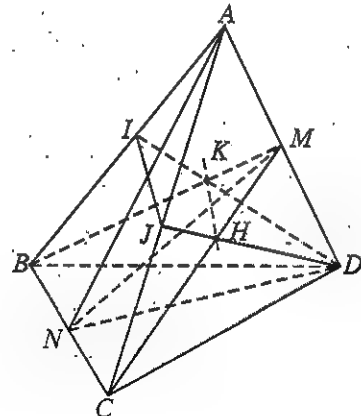
Vậy  $(MNP) \cap (ABD) = EP$ .

8. (h.54)

a) Ta có  $(MBC) \cap (NAD) = MN$ .

b) Gọi  $K$  là giao điểm của  $MB$  với  $ID$  và  $H$  là giao điểm của  $MC$  với  $DJ$  thì rõ ràng  $K$  và  $H$  là hai điểm chung của hai mặt phẳng  $(MBC)$  và  $(IJD)$  nên

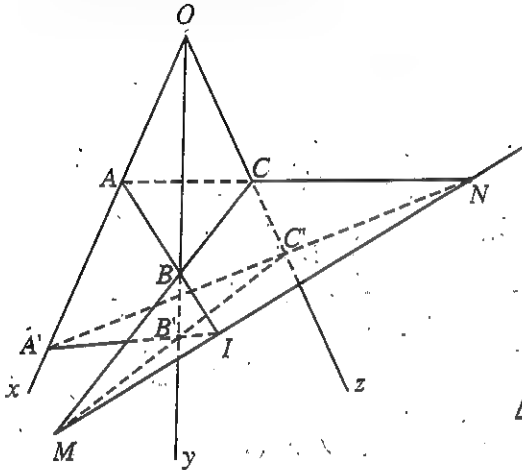
$$(MBC) \cap (IJD) = KH.$$



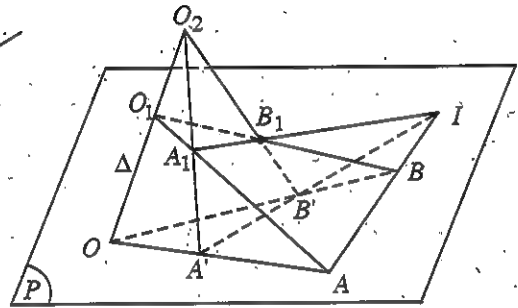
Hình 54

9. Trường hợp  $Ox, Oy, Oz$  không đồng phẳng (h.55)

Để thấy  $M, N, I$  là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt  $(ABC)$  và  $(A'B'C')$  nên chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vậy ba điểm  $M, N, I$  thẳng hàng.



Hình 55



Hình 56

Trường hợp  $Ox, Oy, Oz$  thuộc một  $mp(P)$  (h.56)

Qua  $O$  ta dựng một đường thẳng  $\Delta$  không nằm trên  $mp(P)$ . Trên  $\Delta$  lấy các điểm  $O_1, O_2$ . Gọi  $A_1$  là giao điểm của  $O_1A$  với  $O_2A'$ ;  $B_1$  là giao điểm của  $O_1B$  với  $O_2B'$ . Để chứng minh  $A_1B_1, A'B', AB$  đồng quy tại  $I$ . Tương tự, ta dựng điểm  $C_1$  là giao điểm của  $O_1C$  với  $O_2C'$ . Hai tam giác  $A_1B_1C_1$  và  $ABC$  không nằm trong một mặt phẳng, nên theo câu a) ta được ba điểm  $M, N, I$  thẳng hàng.

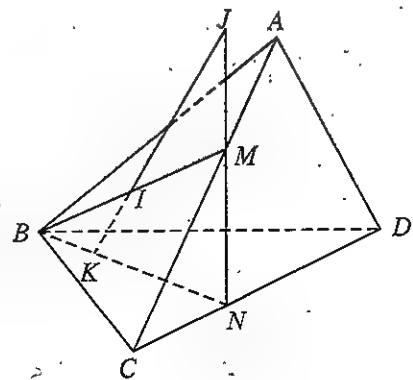
10. (h.57)

Ta chọn một mặt phẳng chứa  $IK$  và tìm giao tuyến của mặt phẳng này với  $mp(ACD)$  thì giao điểm của giao tuyến đó với  $IK$  chính là điểm  $J$  cần tìm.

Xét  $mp(BIK)$ , gọi  $M, N$  lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng  $BI$  với  $CA$  và  $BK$  với  $CD$ . Khi đó

$$(BIK) \cap (ACD) = MN.$$

Từ đó  $J$  chính là giao điểm của đường thẳng  $MN$  với đường thẳng  $KI$ .



Hình 57

11. (h.58)

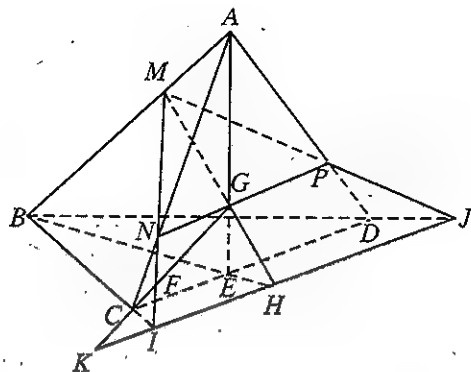
a) Ta có

$$JN \subset mp(MNP),$$

$$IP \subset mp(MNP).$$

$$\forall \frac{CN}{NA} = \frac{EG}{GA} = \frac{DP}{PA} = \frac{1}{2}$$

nên trong  $mp(ACD)$  các điểm  $N, G, P$  nằm trên một đường thẳng song song với  $CD$ . Từ đó  $G$  thuộc  $NP$ , suy ra  $MG \subset mp(MNP)$ . Vậy ba đường thẳng  $MG, JN, IP$  đều thuộc  $mp(MNP)$ .



Hình 58

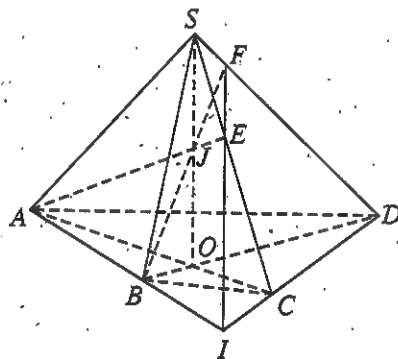
b) Vì  $H$  là giao điểm của  $MG$  với  $BE$  nên  $H$  thuộc  $mp(MNP)$  và  $mp(BCD)$ . Vì  $K$  là giao điểm của  $GF$  với  $mp(BCD)$  nên  $K$  thuộc  $mp(BCD)$  và  $mp(MNP)$ . Mặt khác  $mp(MNP)$  và  $mp(BCD)$  cắt nhau theo giao tuyến  $IJ$ . Vậy các điểm  $H$  và  $K$  phải thuộc đường thẳng  $IJ$ , tức là bốn điểm  $I, J, H, K$  thẳng hàng.

12. (h.59)

a) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ;  $J$  là giao điểm của  $SO$  và  $AE$ . Hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABE)$  có hai điểm chung là  $B$  và  $J$ . Do đó  $(SBD) \cap (ABE) = BJ$ .

Gọi  $F$  là giao điểm của  $BJ$  và  $SD$  thì  $F$  chính là giao điểm của đường thẳng  $SD$  với  $mp(ABE)$ .

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó ba điểm  $I, E, F$  cùng thuộc hai mặt phẳng  $(ABE)$  và  $(SCD)$  nên chúng thẳng hàng.

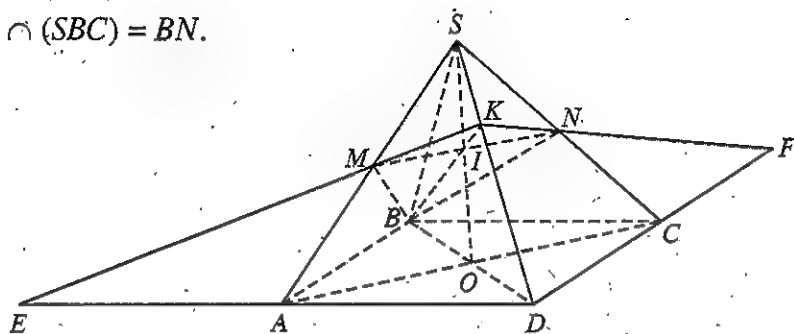


Hình 59

13. (h.60)

a)  $(P) \cap (SAB) = BM,$

$(P) \cap (SBC) = BN.$



Hình 60.

b) Xét mp(SAC), gọi  $I$  là giao điểm của  $SO$  và  $MN$  thì  $I$  là giao điểm của  $SO$  và mp( $P$ ). Gọi  $K$  là giao điểm của đường thẳng  $BI$  với  $SD$  thì  $K$  là giao điểm của  $SD$  và ( $P$ ).

c)  $(P) \cap (SAD) = MK,$

$(P) \cap (SDC) = KN.$

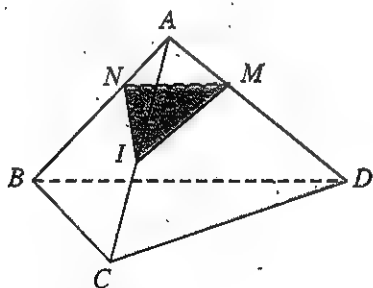
d) Trong mp( $SAD$ ) gọi  $E$  là giao điểm của đường thẳng  $MK$  với đường thẳng  $AD$  thì  $E$  là giao điểm của ( $P$ ) và  $AD$ .

Tương tự giao điểm  $F$  của  $KN$  và  $DC$  là giao điểm của ( $P$ ) và  $DC$ .

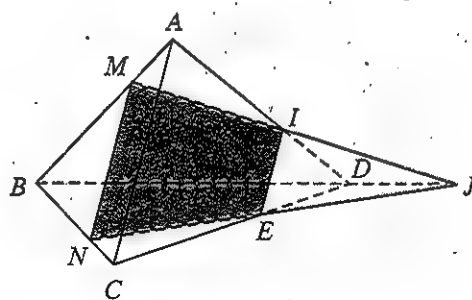
Rõ ràng  $B, E, F$  là ba điểm chung của hai mặt phẳng ( $P$ ) và mp( $ABCD$ ) nên chúng phải thẳng hàng.

14. a) (h.61)

Thiết diện là tam giác  $MNI$ .



Hình 61



Hình 62

b) (h.62)

Kéo dài  $MI$  cắt  $BD$  tại  $J$ . Nối  $J$  với  $N$  cắt  $CD$  tại  $E$ . Thiết diện là tứ giác  $MIEN$ .

c) (h.63)

Kéo dài  $MI$  cắt  $AC$  tại  $J$ . Nối  $J$  và  $N$  cắt  $CD$  tại  $E$ . Thiết diện là tứ giác  $MIEN$ .

15. a) (h.64)

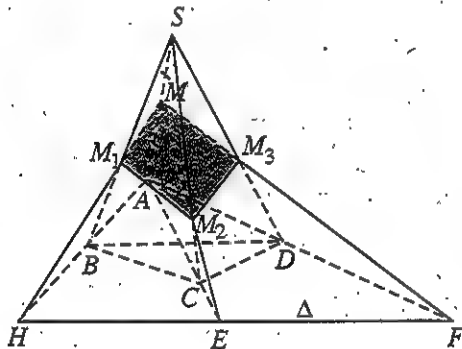
Gọi  $K$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ ; khi đó hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$  có hai điểm chung  $S$  và  $K$ . Vậy giao tuyến của chúng là đường thẳng  $SK$ .

b) Gọi  $M$  là giao điểm của  $IJ$  và  $SK$ . Khi đó  $(SAD) \cap (AIJ) = AM$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $AM$  và  $SD$  thì  $E$  chính là giao điểm của  $SD$  với  $mp(AIJ)$ .

c) Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi  $mp(AIJ)$  là tứ giác  $AIJE$ .

16. a) (h.65)

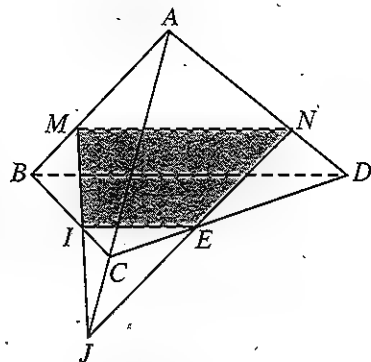
Gọi  $H, E, F$  lần lượt là các giao điểm của  $\Delta$  với các đường thẳng  $AB, AC$  và  $AD$ . Khi đó các cạnh bên  $SB, SC, SD$  của hình chóp lần lượt cắt các đường thẳng  $MH, ME$  và  $MF$  tại  $M_1, M_2, M_3$ . Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi  $mp(M, \Delta)$  trong trường hợp này là tứ giác  $MM_1M_2M_3$ .



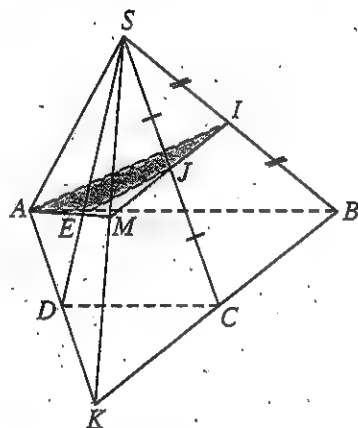
Hình 65

b) (h.66)

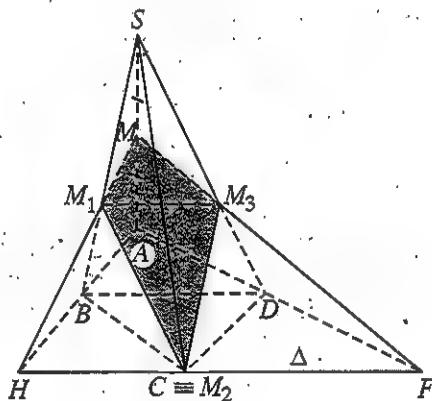
Thiết diện là tứ giác  $MM_1CM_3$ .



Hình 63



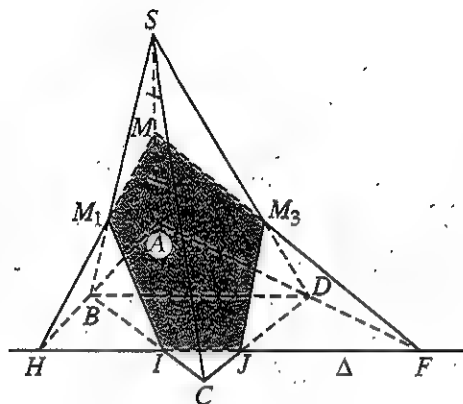
Hình 64



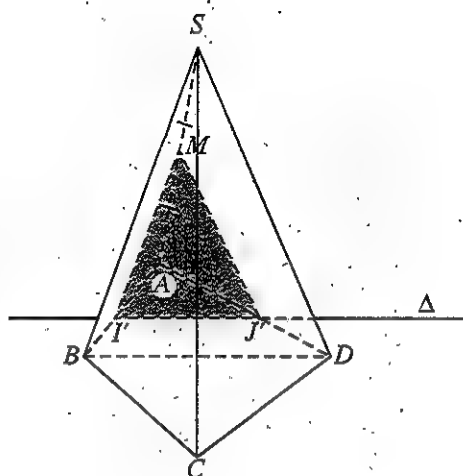
Hình 66

c) (h.67)

Thiết diện là ngũ giác  $MM_1IJM_3$ .



Hình 67



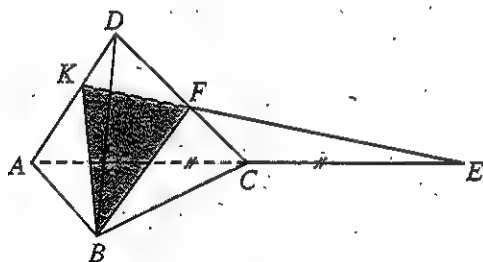
Hình 68

d) (h.68)

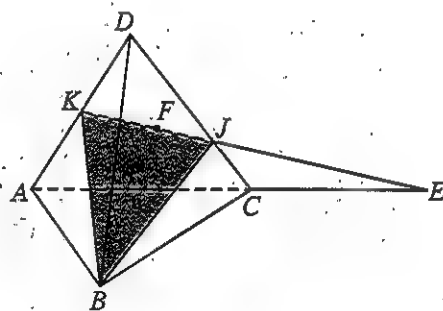
Thiết diện là tam giác  $MIJ$ .

17. a) (h.69)

Trong  $mp(ACD)$ , kéo dài  $EF$  cắt  $AD$  tại  $K$ . Khi đó thiết diện cần tìm là tam giác  $BFK$ .



Hình 69



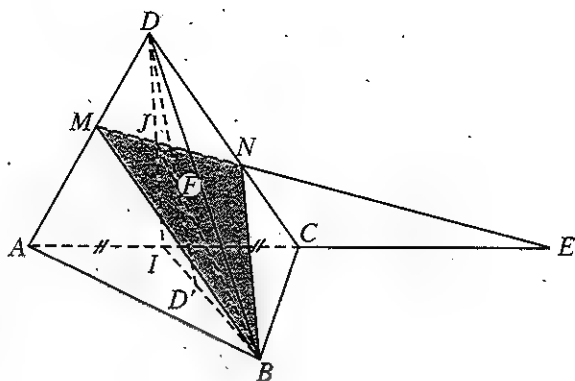
Hình 70

b) (h.70)

Trong  $mp(ACD)$ , kéo dài  $EF$  cắt  $AD$  và  $DC$  lần lượt tại  $K$  và  $J$ . Khi đó thiết diện cần tìm là tam giác  $BKJ$ .

c) (h.71)

Gọi  $I$  là giao điểm của  $BD'$  và  $AC$  ( $I$  là trung điểm của  $AC$ ). Xét mp( $BDI$ ) ta có đường thẳng  $BF$  cắt  $DI$  tại một điểm  $J$ . Khi đó  $J$  là điểm chung của hai mặt phẳng ( $BEF$ ) và ( $DAC$ ). Vậy ( $BEF$ ) cắt ( $DAC$ ) theo đường thẳng  $EJ$ . Đường thẳng này cắt  $AD$  và  $DC$  tại  $M$  và  $N$ . Vậy thiết diện cần tìm là tam giác  $BMN$ .

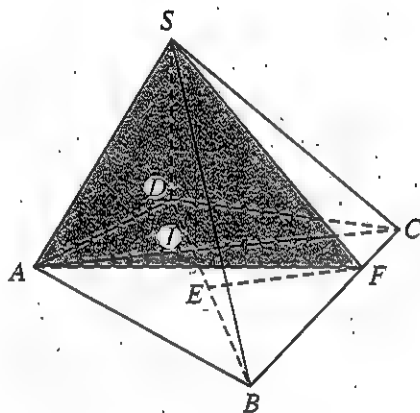


Hình 71

18. (h.72)

Gọi  $E$  là trung điểm của  $BD$ . Trong mp( $ABCD$ ), từ  $E$  kẻ đường thẳng  $EF$  song song với  $AC$ . Đường thẳng này cắt một trong hai cạnh  $CB$  hoặc  $CD$ . Chẳng hạn cắt cạnh  $BC$  tại  $F$ . Tam giác  $SAF$  chính là thiết diện cần tìm.

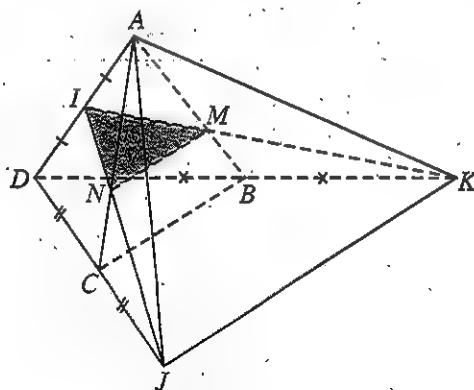
Trong trường hợp  $E$  trùng với giao điểm  $I$  của  $AC$  và  $BD$  thì  $EF$  trùng với  $IC$ . Để chứng minh rằng đường thẳng  $AF$  chia tứ giác  $ABCD$  thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình 72

19. (h.73)

a) Nối  $I$  và  $J$  cắt  $AC$  tại  $N$ . Nối  $I$  và  $K$  cắt  $AB$  tại  $M$ . Tam giác  $IMN$  là thiết diện cần tìm.



Hình 73



b) Dễ thấy  $M$  là trọng tâm tam giác  $ADK$ ,  $N$  là trọng tâm tam giác  $ADJ$ . Từ đó, ta có

$$AN = \frac{2}{3}AC, AM = \frac{2}{3}AB.$$

Suy ra  $AN = AM = \frac{2}{3}a$  và  $MN \parallel CB$ . Do đó  $MN = \frac{2}{3}CB$  hay  $MN = \frac{2}{3}a$ .

Xét tam giác  $AIM$ . Ta có

$$\begin{aligned} IM^2 &= AI^2 + AM^2 - 2AI \cdot AM \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{4}{9}a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{36}a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow IM = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Tương tự, ta có  $IN = \frac{a\sqrt{13}}{6}$ .

Vậy theo công thức Hê-rông, ta có

$$S_{IMN} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6} + \frac{2}{6}a\right) \cdot \frac{2}{6}a \cdot \frac{2}{6}a \cdot \left(\frac{a\sqrt{13}}{6} - \frac{2}{6}a\right)} = \frac{a^2}{6}.$$

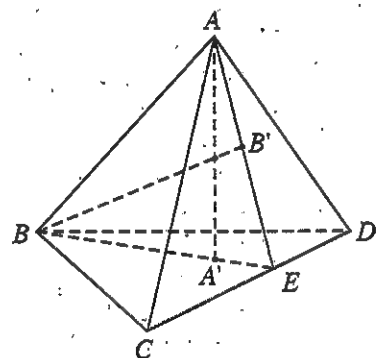
## 20. (h.74)

Vì bốn đỉnh của tứ diện không đồng phẳng nên bốn đường thẳng (lần lượt đi qua mỗi đỉnh của tứ diện và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện) cũng không đồng phẳng. Để chứng minh bốn đường thẳng đó đồng quy ta chỉ cần chứng minh chúng đôi một cắt nhau.

Gọi  $A'$ ,  $B'$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $BCD$  và tam giác  $ACD$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $BA'$  với  $CD$ . Theo tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{BD}.$$

$$\text{Từ giả thiết } AC \cdot BD = AD \cdot BC \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD}.$$



Hình 74

Suy ra  $AE$  là đường phân giác của góc  $CAD$ , do đó tâm  $B'$  của đường tròn nội tiếp tam giác  $ACD$  phải thuộc  $AE$ . Hai đường thẳng  $AA'$  và  $BB'$  nằm trong  $mp(ABE)$ , dễ thấy chúng không song song nên chúng cắt nhau.

Chúng minh tương tự, hai đường thẳng bất kì trong bốn đường thẳng nói trên cắt nhau. Vậy bốn đường thẳng đó không đồng phẳng và đôi một cắt nhau, nên chúng đồng quy.

21. (h.75)

a) Gọi  $K$  là giao điểm của  $MN$  và  $BC$  thì  $K$  cố định và  $K$  là một điểm chung của  $mp(P)$  với  $mp(BCD)$ . Mặt khác

$$mp(P) \cap mp(BCD) = EF.$$

Vậy  $K$  phải thuộc  $EF$ , nên  $EF$  luôn qua điểm cố định  $K$ .

b) Ta có  $I$  là giao điểm của  $ME$  và  $NF$ . Vậy

$$I \in ME, ME \subset (MCD) \Rightarrow I \in (MCD)$$

$$\text{và } I \in NF, NF \subset (NBD) \Rightarrow I \in (NBD).$$

Từ đó, suy ra  $I$  thuộc giao tuyến  $OD$  của  $(MCD)$  và  $(NBD)$ .

Khi  $E$  chạy đến  $C$  thì  $F$  chạy đến  $B$  và  $I$  chạy đến  $O$ .

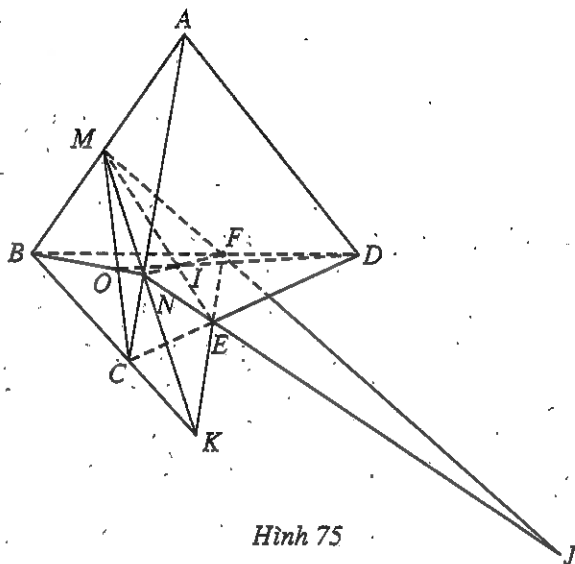
Khi  $E$  chạy đến  $D$  thì  $F$  chạy đến  $D$  và  $I$  cũng chạy đến  $D$ .

Vậy tập hợp các điểm  $I$  là đoạn thẳng  $OD$ .

Học sinh tự chứng minh phần đảo.

c)  $J$  là giao điểm của  $MF$  và  $NE$ . Từ đó dễ thấy  $J$  thuộc cả hai mặt phẳng  $(ABD)$  và  $(ACD)$ . Vậy  $J$  phải thuộc giao tuyến  $AD$  của hai mặt phẳng  $(ABD)$  và  $(ACD)$ .

Lí luận tương tự như câu a) ta thấy tập hợp các điểm  $J$  là đường thẳng  $AD$  trừ các điểm trong của đoạn  $AD$ .



Hình 75

## §2. Hai đường thẳng song song

22. Mệnh đề c) đúng.

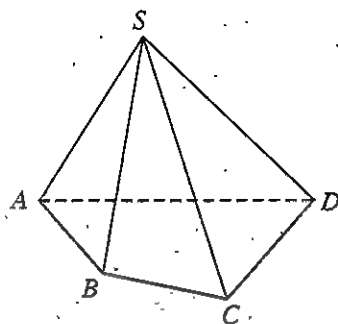
23. (h.76)

Chứng minh  $SA$  và  $BC$  chéo nhau.

Giả sử  $SA$  và  $BC$  không chéo nhau, tức là chúng đồng phẳng. Khi đó  $S$  thuộc  $mp(ABCD)$ , điều đó mâu thuẫn với giả thiết  $S.ABCD$  là hình chóp.

Vậy  $SA$  và  $BC$  chéo nhau.

Các cặp đường thẳng còn lại chứng minh tương tự.



Hình 76

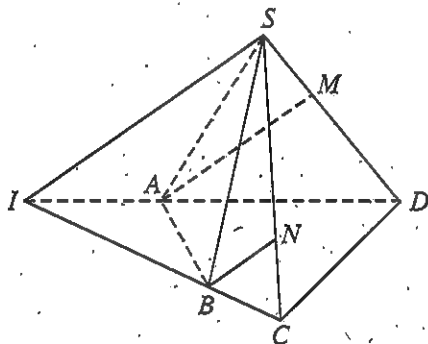
24. (h.77)

Gọi  $I$  là giao điểm của  $BC$  và  $AD$ . Khi đó

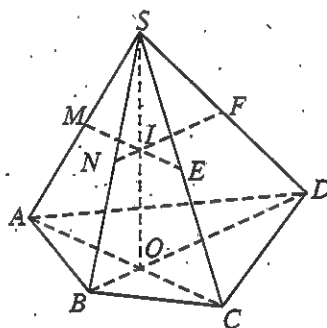
$$(SAD) \cap (SBC) = SI.$$

Giả sử có  $M \in SD$ ,  $N \in SC$  sao cho  $AM \parallel BN$ . Khi đó hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$  cắt nhau theo giao tuyến  $SI$  phải song song với  $AM$  và  $BN$ . Từ đó ta suy ra cách xác định điểm  $M$  và  $N$  như sau :

Từ  $A$  trong  $mp(SAD)$  ta kẻ đường thẳng song song với  $SI$ , cắt  $SD$  tại  $M$  ; từ  $B$  trong  $mp(SBC)$  ta kẻ đường thẳng song song với  $SI$ , cắt  $SC$  tại  $N$ . Khi đó  $M$  và  $N$  là hai điểm cần tìm.



Hình 77



Hình 78

25. (h.78)

a) Xét tam giác  $SAC$ . Ta có  $ME$  là đường trung bình nên  $ME \parallel AC$ . Lí luận tương tự,  $NF \parallel BD$ .

b) Trong  $mp(SAC)$  gọi  $I$  là giao điểm của  $ME$  và  $SO$ . Để thấy  $I$  là trung điểm của  $SO$ . Từ đó  $FI$  là đường trung bình của tam giác  $SOD$ . Vậy  $FI \parallel DO$ . Gọi  $N'$  là giao điểm của đường thẳng  $FI$  với  $SB$ . Do  $FN' \parallel BD$  và  $F$  là trung điểm của  $SD$  suy ra  $N'$  là trung điểm của  $SB$ , tức là  $N' \equiv N$ . Vậy ba đường thẳng  $ME$ ,  $NF$ ,  $SO$  đồng quy tại  $I$ .

c) Do  $ME$  và  $NF$  cắt nhau tại  $I$ , nên qua  $ME$  và  $NF$  xác định một mặt phẳng. Từ đó suy ra bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng.

26. (h.79)

Gọi  $M', N', E', F'$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $SM$  và  $AB$ ,  $SN$  và  $BC$ ,  $SE$  và  $CD$ ,  $SF$  và  $DA$ . Khi đó  $M', N', E', F'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ .

Vì  $M, N$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $SAB$  và  $SBC$  nên

$$\frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow MN \parallel M'N' \text{ và } MN = \frac{2}{3}M'N'. \quad (1)$$

Chúng minh tương tự, ta có :

$$EF \parallel E'F' \text{ và } EF = \frac{2}{3}E'F' \quad (2)$$

$$NE \parallel N'E' \text{ và } NE = \frac{2}{3}N'E' \quad (3)$$

$$MF \parallel M'F' \text{ và } MF = \frac{2}{3}M'F'. \quad (4)$$

a)  $M'N'$  là đường trung bình của tam giác  $BAC$  suy ra

$$M'N' \parallel AC \text{ và } M'N' = \frac{1}{2}AC \quad (5)$$

tương tự  $E'F' \parallel AC \text{ và } E'F' = \frac{1}{2}AC. \quad (6)$

Từ (5) và (6) suy ra  $M'N' \parallel E'F'$  và  $M'N' = E'F' = \frac{1}{2}AC. \quad (7)$

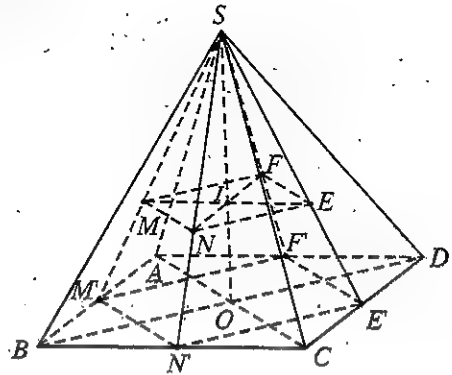
Từ (1), (2), (7) suy ra  $MN \parallel EF$ . Vậy bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng.

b) Lí luận tương tự như câu a), ta suy ra

$$N'E' \parallel M'F' \text{ và } N'E' = M'F' = \frac{1}{2}BD. \quad (8)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (7), (8) và  $AC = BD$  suy ra

$$MN = NE = EF = FM = \frac{1}{3}AC. \text{ Vậy tứ giác } MNEF \text{ là một hình thoi.}$$



Hình 79

c) Để thấy  $O$  cũng là giao điểm của  $ME'$  và  $NF'$ . Xét ba mặt phẳng  $(M'S'E')$ ,  $(N'S'F')$  và  $(MNEF)$ . Ta có

$$(M'S'E') \cap (N'S'F') = SO$$

$$(M'S'E') \cap (MNEF) = ME$$

$$(N'S'F') \cap (MNEF) = NF$$

$$ME \cap NF = I.$$

Vậy theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng  $SO$ ,  $ME$  và  $NF$  đồng quy.

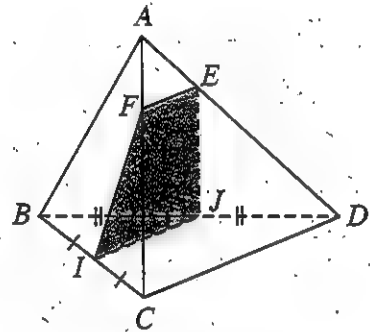
27. (h.80)

a) Ta có  $IJ$  là đường trung bình của tam giác  $BCD$  nên  $IJ \parallel CD$ .

Mặt khác  $IJ \subset (IJE)$ ;  $CD \subset (ACD)$ , suy ra mp( $IJE$ ) cắt mp( $ACD$ ) theo giao tuyến  $Ex \parallel CD$ . Gọi  $F$  là giao điểm của  $Ex$  và  $AC$ . Thiết diện là hình thang  $EFIJ$ .

b) Để thiết diện  $EFIJ$  là hình bình hành điều kiện cần và đủ là  $IF \parallel JE$ .

Điều này tương đương với  $JE \parallel AB$  tức là khi và chỉ khi  $E$  là trung điểm của  $AD$ .



Hình 80

c) Thiết diện  $EFIJ$  là hình thoi  $\Leftrightarrow EFIJ$  là hình bình hành và  $IF = IJ \Leftrightarrow E$  là trung điểm của  $AD$  và  $AB = CD$  (vì  $IJ = \frac{1}{2}CD$  và khi  $E$  là trung điểm của  $AD$  thì  $IF = \frac{1}{2}AB$ ).

28. (h.81)

a) Gọi  $M'$  và  $N'$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AD$ . Để thấy :

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel M'N' \\ M'N' \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel BD.$$

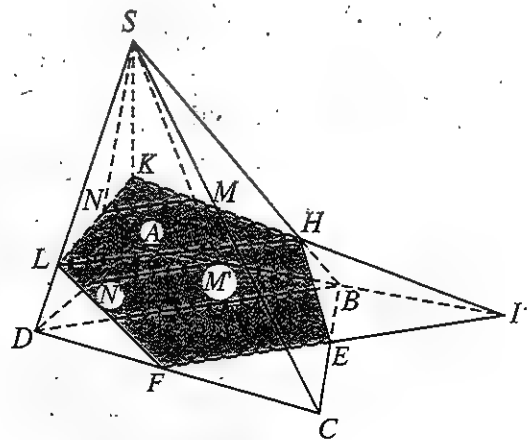
b) Ta có :

$$MN \subset (MNE)$$

$$BD \subset (ABCD)$$

$$MN \parallel BD$$

$\Rightarrow (MNE) \cap (ABCD) = Ex$  thoả mãn  $Ex \parallel NM \parallel BD$ .



Hình 81

Vậy từ  $E$  ta kẻ đường thẳng song song với  $BD$  lần lượt cắt  $CD, AB$  tại  $F, I$ . Nối  $IM$  lần lượt cắt  $SB$  và  $SA$  tại  $H$  và  $K$ ; nối  $KN$  cắt  $SD$  tại  $L$ . Thiết diện cần tìm là ngũ giác  $KLFEH$ .

c) Ta có :

$$NM \subset mp(MNE)$$

$$DB \subset mp(SBD)$$

$$MN \parallel DB$$

và

$$(MNE) \cap (SBD) = LH.$$

Suy ra

$$LH \parallel DB.$$

29. (h.82)

a) Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $BCD, CDA, ADB$  và  $ABC$ . Do  $A, B, C, D$  không đồng phẳng nên  $AA', BB', CC', DD'$  không đồng phẳng. Ta chứng minh các đoạn thẳng đó từng đôi cắt nhau.

Gọi  $M$  là giao điểm của  $BA'$  và  $CD$ . Khi đó  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Vì  $B'$  là trọng tâm tam giác  $ACD$  nên ba điểm

$A, B', M$  thẳng hàng. Vậy  $AA'$  và  $BB'$  cùng thuộc  $mp(ABM)$  và  $A'$  thuộc đoạn  $BM, B'$  thuộc đoạn  $AM$  nên  $AA'$  và  $BB'$  cắt nhau tại điểm  $G$  nào đó. Lí luận tương tự, ta cũng có các đường thẳng nói trên từng đôi cắt nhau. Vậy chúng phải đồng quy.

Ta có thể chứng minh cách khác như sau :

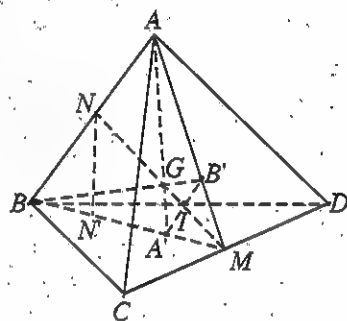
Lí luận như trên, trong tam giác  $ABM$  ta có  $AA'$  và  $BB'$  cắt nhau tại  $G$ . Vì

$$\frac{A'M}{MB} = \frac{B'M}{MA} = \frac{1}{3}$$

nên  $A'B' \parallel AB$ .

$$\text{Suy ra } \frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3}.$$



Hình 82

Nhưng  $AA'$ ,  $BB'$  là hai đoạn thẳng tùy ý trong bốn đoạn thẳng  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ . Vậy chúng đồng quy tại điểm  $G$  và điểm  $G$  chia trong mỗi đoạn thẳng đó theo tỉ số  $3 : 1$  kể từ đỉnh đến trọng tâm của mặt đối diện.

b) Nối  $M$  với  $G$  và kéo dài cắt  $AB$  tại  $N$ . Ta sẽ chứng minh  $N$  là trung điểm của  $AB$  và  $G$  là trung điểm của  $MN$ . Thật vậy, gọi  $I$  là giao điểm của  $MN$  với  $A'B'$ . Vì  $A'B' \parallel AB$ , ta có :

$$\frac{IB'}{NB} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3}; \frac{IB'}{NA} = \frac{MB'}{MA} = \frac{1}{3}$$

nên 
$$\frac{IB'}{NB} = \frac{IB'}{NA} \Rightarrow NB = NA.$$

Suy ra  $N$  là trung điểm của  $AB$ .

Kẻ  $NN' \parallel AA'$  ( $N' \in BA'$ ).

Ta có  $N'$  là trung điểm của  $BA'$ , suy ra  $A'$  là trung điểm của  $N'M$ . Do đó  $A'G$  là đường trung bình của tam giác  $MNN'$ . Suy ra  $G$  là trung điểm của  $MN$ .

Vậy điểm  $G$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .

### 30. (h.83)

a) Trong mp( $BCD$ ), từ  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $BM$  cắt  $CB$  tại  $K$ . Đường thẳng  $KN$  cắt  $AC$  tại  $I$ . Trong mp( $IKD$ ), từ  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $DK$  cắt đường thẳng  $DN$  tại  $J$ . Khi đó theo cách dựng ta có  $IJ \parallel BM$ .

b) Do  $BM$  là đường trung bình của tam giác  $CKD$  nên

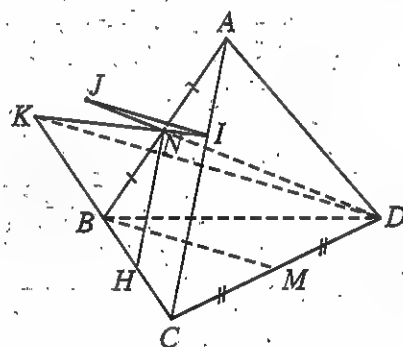
$$KD = 2BM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Khi đó

$$NH \parallel AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$$

$$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ.$$

Vậy 
$$IJ = \frac{1}{3}KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 83

31. a) Trường hợp 1.  $MN \parallel EF$ .

Theo hệ quả của định lý giao tuyến của ba mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $(ACD)$ ,  $(MNEF)$  ta có  $MN \parallel EF \parallel AC$ . Do đó ta có

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB}, \frac{EC}{ED} = \frac{FA}{FD}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{NC}{NB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{FA}{FD} \cdot \frac{FD}{FA} = 1 \text{ suy ra đpcm.}$$

Trường hợp 2.  $MN$  cắt  $EF$  tại  $O$  (h.84).

Theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $(ACD)$ ,  $(MNEF)$  ta có  $MN$ ,  $AC$ ,  $EF$  đồng quy tại  $O$ . Kẻ  $CI \parallel AB$ ,  $CJ \parallel AD$  ( $I \in MN$ ,  $J \in FE$ ), ta có

$$\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{CI}, \frac{OC}{OA} = \frac{CI}{MA}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{OC}{OA} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MB}{CI} \cdot \frac{CI}{MA} = 1.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{OA}{OC} = 1.$$

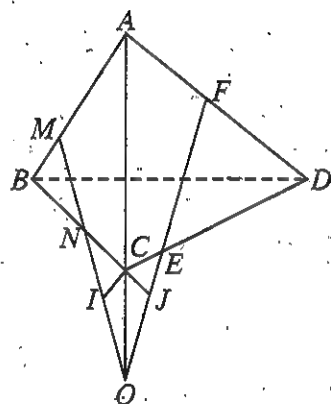
Vậy 
$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1.$$

b) Giả sử mặt phẳng  $(MNE)$  cắt cạnh  $AD$  tại  $F'$ . Theo câu a), ta có

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{F'D}{F'A} = 1.$$

Theo giả thiết 
$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1 \Rightarrow F'D = FD.$$

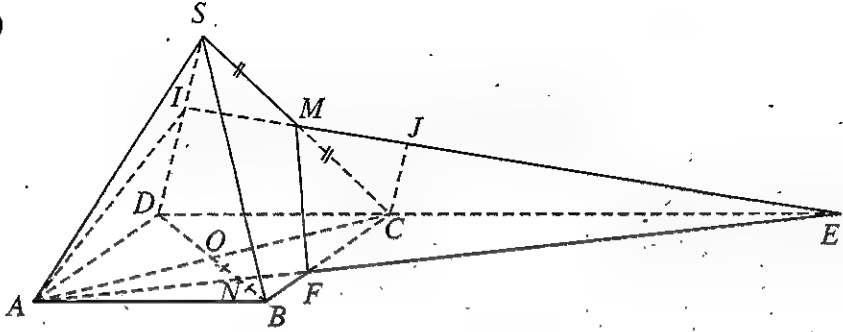
Vì  $F, F'$  đều nằm trong đoạn thẳng  $AD$  nên  $F' \equiv F$ . Điều này có nghĩa là bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng.



Hình 84



32. (h.85)



Hình 85

a) Kéo dài AN cắt DC tại E. Nối E và M cắt SD tại I, thế thì I chính là giao điểm của SD và mp(AMN).

b) Gọi F là giao điểm của AN với BC.

$$BF \parallel AD \Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Từ } \frac{BF}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3}$$

Kẻ CJ // SD (J ∈ ED). Ta có :

$$\frac{MC}{MS} = \frac{CJ}{IS}, \frac{ID}{CJ} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{IS}{ID} = \frac{MS}{MC} \cdot \frac{EC}{ED} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{IS}{ID} = \frac{2}{3}$$

### §3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

33. (h.86)

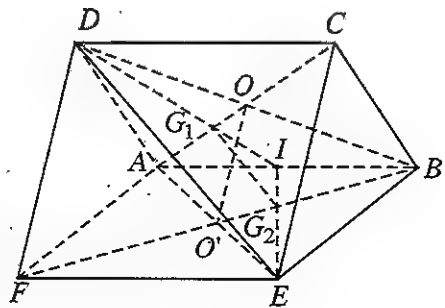
a)  $OO'$  là đường trung bình của tam giác BDF suy ra  $OO' \parallel DF$ .

Mà  $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$ .

$OO'$  là đường trung bình của tam giác ACE suy ra  $OO' \parallel CE$ .

Mà  $CE \subset (BCE) \Rightarrow OO' \parallel (BCE)$ .

b) Gọi I là trung điểm của AB thì I thuộc đường thẳng  $G_1D$  và đường thẳng  $G_2E$ .



Hình 86

Xét tam giác  $IDE$ . Ta có

$$\frac{IG_1}{ID} = \frac{IG_2}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel ED.$$

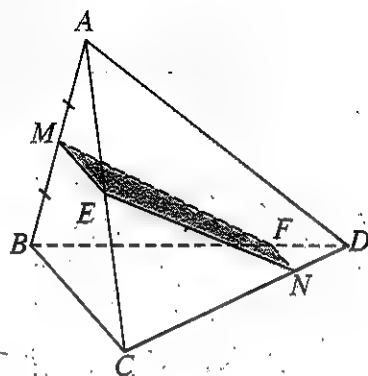
Do đường thẳng  $DE$  nằm trong mp( $CEF$ ) suy ra  $G_1G_2 \parallel (CEF)$ .

34. (h.87).

a) Mặt phẳng  $(ABC)$  chứa  $BC$  và  $BC \parallel (P)$  nên  $(ABC)$  cắt  $(P)$  theo giao tuyến  $ME \parallel BC$  ( $E \in AC$ ). Tương tự, mp( $DBC$ ) cắt  $(P)$  theo giao tuyến  $NF \parallel BC$  ( $F \in BD$ ). (Để thấy  $E$  là trung điểm của  $AC$ ). Thiết diện là hình thang  $MENF$ .

b) Từ câu a), ta có :

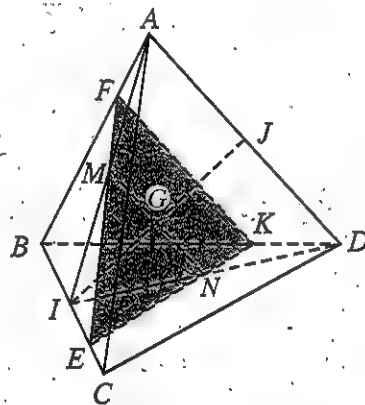
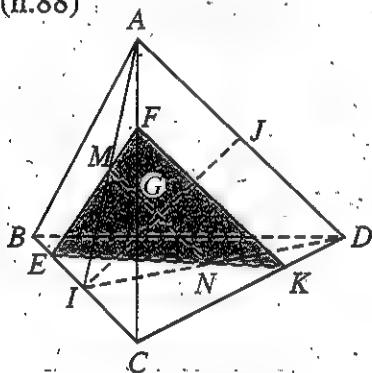
$$ME \parallel NF \text{ và } ME = \frac{1}{2}BC.$$



Hình 87

Vậy tứ giác  $MENF$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $NF = ME = \frac{1}{2}BC$ , hay  $N$  là trung điểm của  $CD$ .

35. a) (h.88)



Hình 88

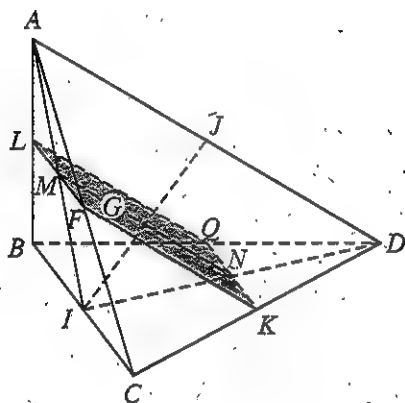
Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$  thì  $G$  là trung điểm của  $IJ$ . Mặt phẳng  $(IAD)$  chứa  $AD$ ,  $AD \parallel (P)$  nên  $(IAD)$  cắt  $(P)$  theo giao tuyến  $MN$  qua  $G$  và song song với  $AD$  ( $M \in AI$ ,  $N \in DI$ ).

Khi  $E$  trùng với  $I$ , thiết diện không tồn tại.

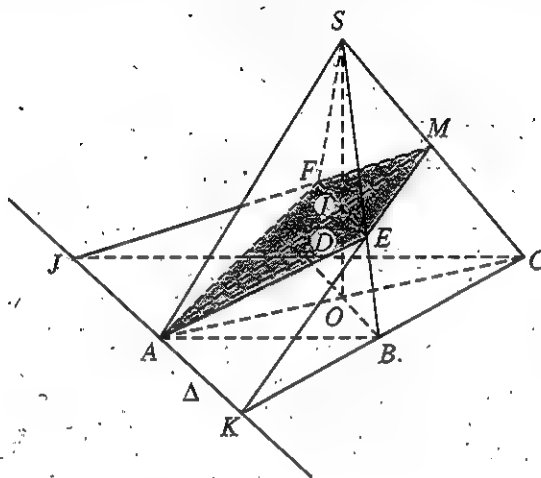
Khi  $E$  không trùng với  $I$ , ta có thiết diện là tam giác  $EFK$ .

b) (h.89)

Theo câu a), mặt phẳng cắt  $(P)$  song song với  $AD$  và chứa  $MN$ . Mặt khác  $(P)$  song song với  $BC$  nên nó cắt mp( $ABC$ ) và  $(BCD)$  theo các giao tuyến lần lượt qua  $M, N$  và song song với  $BC$ . Vậy thiết diện là hình bình hành  $LFKQ$ .



Hình 89



Hình 90

**36. (h.90)**

a) Gọi  $I$  là giao điểm của  $SO$  và  $AM$  ( $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ). Vì  $BD \parallel (P)$  nên mặt phẳng  $(SBD)$  chứa  $BD$  cắt  $(P)$  theo giao tuyến qua  $I$  và song song với  $BD$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là giao điểm của giao tuyến này với các cạnh  $SB$  và  $SD$  thì  $E$  và  $F$  lần lượt là giao điểm của  $SB$  và  $SD$  với mặt phẳng  $(P)$ .

Vậy thiết diện là tứ giác  $AEMF$ .

b) Để thấy  $I$  là trọng tâm tam giác  $SAC$ , ta có :

$$\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

Do đó:

$$\frac{S_{SME}}{S_{SBC}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{S_{SMF}}{S_{SCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

c) Dễ thấy  $K, A, J$  là ba điểm chung của hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(ABCD)$  nên chúng nằm trên giao tuyến  $\Delta$  của hai mặt phẳng này. Vì  $BD \parallel (P)$  và  $BD \subset (ABCD)$  nên  $\Delta \parallel BD \Rightarrow \Delta \parallel EF$ . Ta có :

$$\frac{EF}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} ; KJ = 2BD.$$

Vậy  $\frac{EF}{KJ} = \frac{1}{3}$ .

37. (h.91)

a) Thiết diện  $A'B'C'D'$  là hình thang khi và chỉ khi  $A'B' \parallel C'D'$  hoặc  $A'D' \parallel B'C'$ .

Ta có :

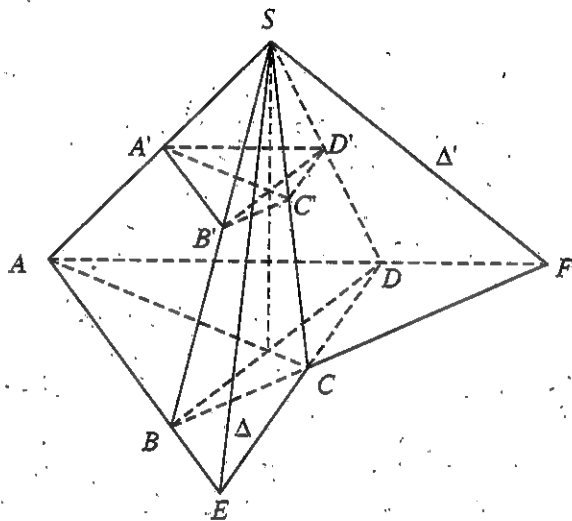
- $A'B' \parallel C'D'$  khi và chỉ khi giao tuyến  $\Delta$  của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  song song với  $A'B'$  tức là  $\Delta \parallel mp(P)$ .

- $A'D' \parallel B'C'$  khi và chỉ khi giao tuyến  $\Delta'$  của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$  song song với  $A'D'$  tức là  $\Delta' \parallel mp(P)$ .

Vậy tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình

thang khi và chỉ khi  $(P)$  song song với  $\Delta$  hoặc song song với  $\Delta'$ .

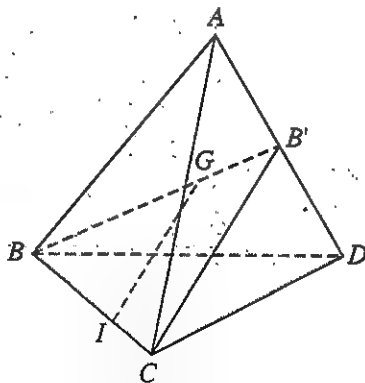
b) Tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $mp(P)$  song song với cả hai đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$ .



Hình 91

38. (h.92)

Gọi  $B'$  là giao điểm của đường thẳng  $BG$  và  $AD$ . Khi đó  $B'$  là trung điểm của  $AD$  và  $BG = 2GB'$ . Mặt khác ta có  $BI = 2IC$ . Do đó  $GI \parallel CB'$ . Mà  $CB'$  nằm trên  $mp(ACD)$  nên  $IG$  song song với  $mp(ACD)$ .



Hình 92

39. (h.93)

a) Ta có  $AB \parallel (P), AB \subset (ABC)$   
 $\Rightarrow (ABC) \cap (P) = MF \parallel AB$

và  $AB \parallel (P), AB \subset (ABD)$   
 $\Rightarrow (ABD) \cap (P) = NE \parallel AB.$

Vậy  $MF \parallel NE \parallel AB.$  (1)

Chứng minh tương tự ta có

$MN \parallel EF \parallel CD.$  (2)

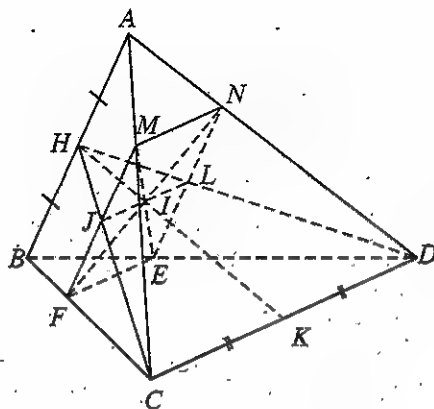
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $MNEF$  là hình bình hành.

b) Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

Gọi  $J$  và  $L$  lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng  $CH$  và  $MF$ ,  $DH$  và  $NE$  thì rõ ràng ba điểm  $J, I, L$  thẳng hàng. Vậy khi  $(P)$  đi động thì tâm  $I$  của hình bình hành  $MNEF$  chạy trên đoạn thẳng  $HK$ .

Ngược lại, lấy một điểm  $I$  bất kì trên đoạn thẳng  $HK$ . Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $CD$  lần lượt cắt  $CH$  và  $DH$  tại  $J$  và  $L$ . Qua  $J$  và  $L$  lần lượt kẻ hai đường thẳng  $MF$  ( $M \in AC, F \in BC$ ),  $NE$  ( $N \in AD, E \in BD$ ) cùng song song với  $AB$ . Dễ thấy tứ giác  $MNEF$  là hình bình hành và có tâm là  $I$ .

Vậy tập hợp tâm  $I$  của hình bình hành  $MNEF$  là đoạn thẳng  $HK$ .



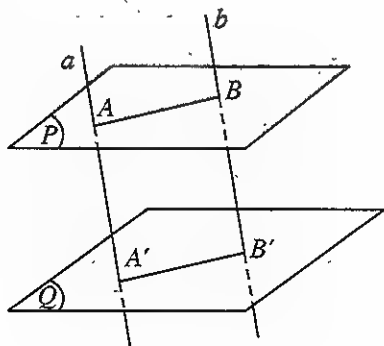
Hình 93

#### §4. Hai mặt phẳng song song

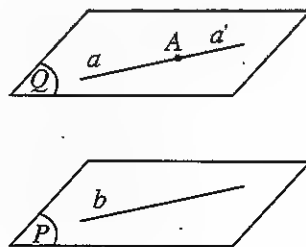
40. a), c).

41. (h.94)

Vì  $a \parallel b$  nên có  $mp(R) \equiv mp(a, b)$ . Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song  $(P)$  và  $(Q)$  theo hai giao tuyến song song  $AB$  và  $A'B'$ . Vậy tứ giác  $ABB'A'$  có  $AB \parallel A'B'$  và  $AA' \parallel BB'$ ; do đó nó là một hình bình hành. Vậy  $AA' = BB'$ .



Hình 94



Hình 95

42. (h.95)

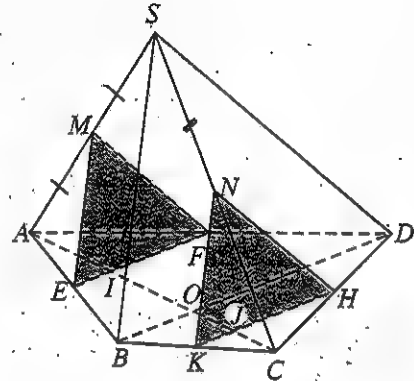
Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng duy nhất đi qua  $A$  và song song với  $(P)$ . Giả sử  $a$  là một đường thẳng bất kỳ qua  $A$  và song song với  $(P)$ . Ta phải chứng minh đường thẳng  $a$  nằm trên  $(Q)$ .

Vì  $a \parallel (P)$  nên có đường thẳng  $b$  thuộc  $(P)$  sao cho  $a$  và  $b$  song song. Vậy  $mp(a, b)$  cắt  $(Q)$  theo giao tuyến  $a'$  qua  $A$  và song song với  $b$ . Từ đó  $a$  trùng với  $a'$ , tức là  $a$  nằm trên  $(Q)$ .

43. a) (h.96)

Giả sử  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $mp(SBD)$  và  $E, F$  là giao điểm của  $(P)$  với các cạnh  $AB$  và  $AD$ . Khi đó, dễ thấy  $ME \parallel SB$ ,  $MF \parallel SD$  và  $EF \parallel BD$ . Vậy thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $mp(SBD)$  là tam giác  $MEF$ .

Tương tự, thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua  $N$  và song song với  $mp(SBD)$  là tam giác  $NKH$  với  $NK \parallel SB$ ,  $NH \parallel SD$ ,  $KH \parallel BD$ .



Hình 96

b)  $I, J$  lần lượt là giao điểm của hai mặt phẳng  $(MEF)$ ,  $(NKH)$  với  $AC$  cũng chính là giao điểm của  $EF$ ,  $KH$  với  $AC$ . Do  $M$  là trung điểm của  $SA$  và  $ME \parallel SB$ ,  $MF \parallel SD$  nên  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AD$ . Từ đó suy ra  $I$  là trung điểm của  $AO$ , (ở đây  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ).

Vậy  $IO = \frac{1}{2}AO$ .

Tương tự  $OJ = \frac{1}{2}OC$ . Vậy  $IJ = \frac{1}{2}AC$ .

44. (h.97)

• Giả sử  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.

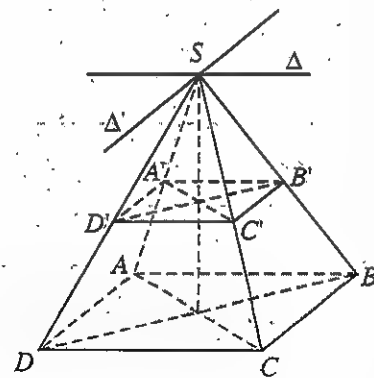
Ta có :

$$A'B' \parallel C'D'$$

$$A'B' \subset (SAB)$$

$$C'D' \subset (SCD)$$

suy ra giao tuyến  $\Delta$  của  $(SAB)$  và  $(SCD)$  song song với  $A'B'$  và  $C'D'$ .



Hình 97

Mặt khác

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \parallel AB \parallel CD.$$

Vậy  $A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' \parallel (ABCD). \quad (1)$

Chứng minh tương tự, ta có

$$A'D' \parallel AD \Rightarrow A'D' \parallel (ABCD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $(P) \parallel (ABCD).$

• Giả sử  $(P) \parallel (ABCD).$

Khi đó hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(ABCD)$  bị mặt phẳng  $(SAB)$  cắt theo hai giao tuyến  $A'B'$  và  $AB$  song song.

Tương tự, ta có :

$$C'D' \parallel CD$$

$$B'C' \parallel BC$$

$$A'D' \parallel AD.$$

suy ra  $A'B' \parallel C'D'$  và  $B'C' \parallel A'D'.$

Vậy tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.

45. (h.98)

a) Gọi  $I, J, K$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $SI$  và  $AB$ ,  $SJ$  và  $BC$ ,  $SK$  và  $CA$ . Khi đó  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$ .

Ta có

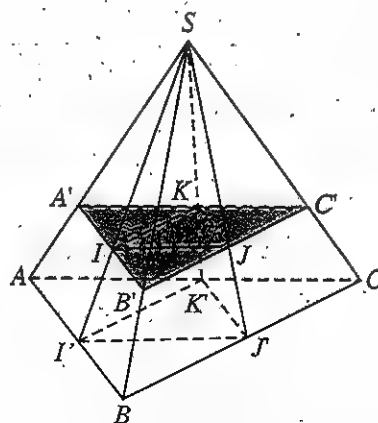
$$\frac{SI}{SI'} = \frac{SK}{SK'} = \frac{SJ}{SJ'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow IK \parallel I'K', KJ \parallel K'J'$$

$$\Rightarrow mp(IJK) \parallel mp(I'J'K').$$

Mặt khác  $mp(I'J'K') \equiv mp(ABC).$

Vậy  $(IJK) \parallel (ABC).$



Hình 98

b) Ta có  $KM \parallel (ABC)$  khi và chỉ khi  $KM$  thuộc  $mp(P)$  qua  $K$  và song song với  $mp(ABC)$ . Vậy  $KM \parallel (ABC)$  khi và chỉ khi  $M \in (P).$

Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là các giao điểm của  $(P)$  với các cạnh  $SA, SB, SC$ .  
 Khi đó  $A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, C'A' \parallel CA$ .

Theo giả thiết  $M$  chỉ nằm trong hình chóp  $S.ABC$ , nên tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $KM \parallel (ABC)$  là tam giác  $A'B'C'$ .

46. (h.99)

$$\left. \begin{array}{l} a) \cdot (P) \parallel (SAB) \\ (P) \cap (ABCD) = MN \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel AB \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot (P) \parallel (SAB) \\ (P) \cap (SBC) = MF \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{array} \right\} \Rightarrow MF \parallel SB \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot (P) \parallel (SAB) \\ (P) \cap (SAD) = NE \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{array} \right\} \Rightarrow NE \parallel SA \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot (P) \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ (P) \cap (SCD) = EF \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel CD \quad (4)$$

Các điểm  $N, E, F$  được xác định bởi (1), (2), (3), (4) là giao điểm của  $(P)$  với  $AD, SD, SC$  có tính chất  $EF \parallel MN$ . Vậy thiết diện là hình thang  $MNEF$ .

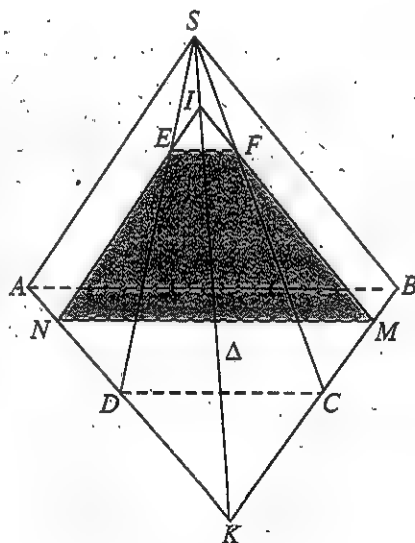
b) Xét ba mặt phẳng  $(P), (SAD), (SBC)$ .  
 Ta có:

$$(P) \cap (SAD) = NE$$

$$(P) \cap (SBC) = MF$$

$$(SAD) \cap (SBC) = \Delta.$$

Vậy ba đường thẳng  $NE, MF, \Delta$  đồng quy tại  $I$  ( $I$  là giao điểm của  $NE$  và  $MF$ ). Từ đó, điểm  $I$  chạy trên đường thẳng  $\Delta$  cố định.



Hình 99



47. (h.100)

a) Trường hợp  $M$  không phải là trung điểm của  $BC$ .

Nối  $M$  với  $I$  cắt  $AC$  tại  $E$ . Nối  $E$  với  $J$  cắt  $AD$  tại  $N$ .  $N$  chính là điểm cần tìm.

Trường hợp  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

Khi đó  $IM \parallel AC$  và  $(IJM) \parallel AC$ . Vậy  $mp(IJM)$  cắt  $mp(ACD)$  theo giao tuyến  $JN \parallel AC$ .

b) Vì  $\frac{IA}{JD} = \frac{IB}{JC} = \frac{AB}{DC}$ , nên qua  $IJ$ ,

$AD, BC$  có ba mặt phẳng song song

(định lý Ta-lét đảo). Ba mặt phẳng này cắt hai đường thẳng  $AB$  và  $NM$  tại các điểm  $I, A, B$  và  $K, N, M$ . Vì  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên  $K$  là trung điểm của  $MN$  (định lý Ta-lét).

48. (h.101)

*Phân thuận.* Giả sử  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Gọi  $P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AD$  và  $DB$ . Vì

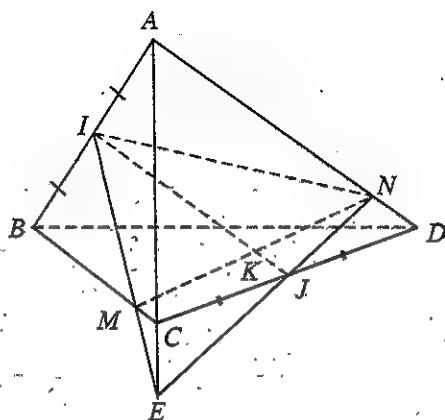
$$\frac{PB}{IM} = \frac{PC}{IN} = \frac{BC}{MN}$$

nên  $BM, PI, CN$  cùng song song với một mặt phẳng, mặt phẳng này song song với  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $P$  và song song với mặt phẳng đó thì rõ ràng  $I \in (\alpha)$ . Mặt phẳng

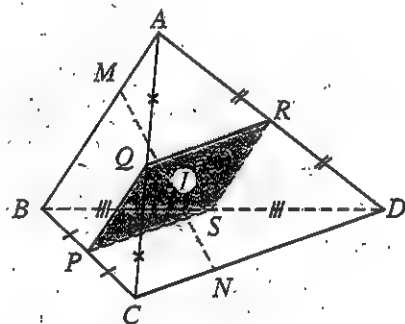
này cắt tứ diện  $ABCD$  theo thiết diện là hình bình hành  $PQRS$ . Vì  $M$  chỉ chạy trên đoạn  $AB$ ,  $N$  chỉ di động trên  $CD$  nên điểm  $I$  luôn nằm trong tứ diện, tức là  $I$  luôn nằm trong hình bình hành  $PQRS$ .

*Phân đảo.* Lấy một điểm  $I$  nằm trong hình bình hành  $PQRS$ . Qua  $I$  có một đường thẳng cắt hai cạnh  $AB$  và  $CD$  tại  $M$  và  $N$  (bài tập 32 chương II SGK). Theo định lý Ta-lét thì  $I$  là trung điểm của  $MN$ .

Vậy tập hợp các điểm  $I$  là hình bình hành  $PQRS$  (cùng với các điểm trong của nó).



Hình 100



Hình 101

49. (h.102)

a) Ta vẽ một đường thẳng  $\Delta$  bất kì cắt mặt phẳng  $(MNEF)$  tại một điểm  $O$ .

Bốn mặt phẳng lần lượt qua  $A, B, C, D$  và đồng thời song song với mặt phẳng  $(MNEF)$  cắt đường thẳng  $\Delta$  theo thứ tự tại  $A', B', C'$  và  $D'$ . Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'}, \quad \frac{NB}{NC} = \frac{OB'}{OC'},$$

$$\frac{EC}{ED} = \frac{OC'}{OD'}, \quad \frac{FD}{FA} = \frac{OD'}{OA'}.$$

Vậy

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OD'} \cdot \frac{OD'}{OA'} = 1.$$

b) Chứng minh như câu b) bài 31 (chương II).

50. (h.103)

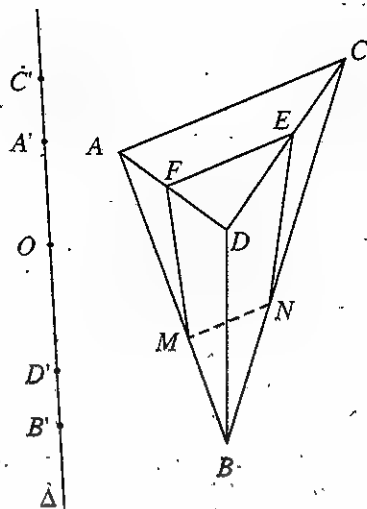
*Cách 1.* Qua mỗi cạnh của hình tứ diện  $ABCD$  ta dựng một mặt phẳng song song với cạnh đối diện. Khi đó sáu mặt phẳng vừa dựng sẽ cắt nhau theo một hình hộp cân tìm có sáu mặt bên nằm trên sáu mặt phẳng nói trên.

*Cách 2.* Qua trung điểm  $I$  của  $AB$  ta dựng đoạn thẳng  $C'D'$  bằng đoạn  $CD$  sao cho  $C'D' \parallel CD$  và  $I$  là trung điểm của  $C'D'$ . Qua trung điểm  $I'$  của  $CD$  ta dựng đoạn  $A'B'$  bằng đoạn  $AB$  sao cho  $A'B' \parallel AB$  và  $I'$  là trung điểm của  $A'B'$ . Khi đó rõ ràng  $AC'BD', A'CB'D$  là hình hộp cân dựng.

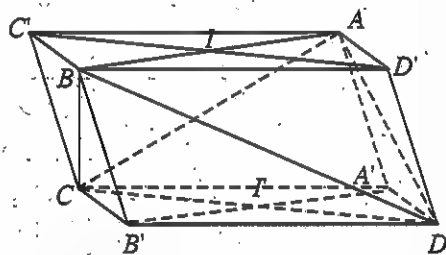
51. (h.104)

a) Sử dụng định lí Ta-lét.

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $AD$  và song song với  $mp(A'D'CB)$  (có  $(P)$  vì  $AD \parallel A'D'$ ).



Hình 102



Hình 103

Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $mp(A'D'CB)$ . Giả sử  $(Q)$  cắt  $DB$  tại  $N$ .

Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB} \quad (*)$$

Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh  $a$  nên

$$AD' = DB = a\sqrt{2}.$$

Từ  $(*)$ , ta có  $AM = DN'$

$$\Rightarrow DN' = DN$$

$$\Rightarrow N' \equiv N$$

$$\Rightarrow MN \subset (Q).$$

Mà  $(Q) \parallel (A'D'CB)$  suy ra  $MN$  luôn song song với mặt phẳng cố định  $(A'D'CB)$ .

Sử dụng định lí Ta-lét đảo.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \frac{AM}{DN} = \frac{MD'}{NB} = \frac{AD'}{DB}$$

suy ra  $AD$ ,  $MN$  và  $D'B$  luôn song song với một mặt phẳng (định lí Ta-lét đảo). Vậy  $MN$  luôn song song với một mặt phẳng  $(P)$ , mà  $(P)$  song song với  $AD$  và  $D'B$ . Có thể chọn mặt phẳng này chính là  $mp(A'D'CB)$ .

b) Gọi  $O$  là giao điểm của  $DB$  và  $AC$ . Ta có

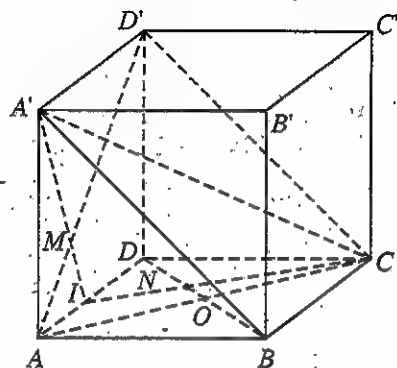
$$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow DN = \frac{2}{3}DO$$

suy ra  $N$  là trọng tâm tam giác  $ADC$ .

Chứng minh tương tự, ta có  $M$  là trọng tâm tam giác  $A'AD$ . Vậy  $CN$  và  $A'M$  cắt nhau tại  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Ta có

$$\frac{IM}{IA'} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel A'C.$$



Hình 104

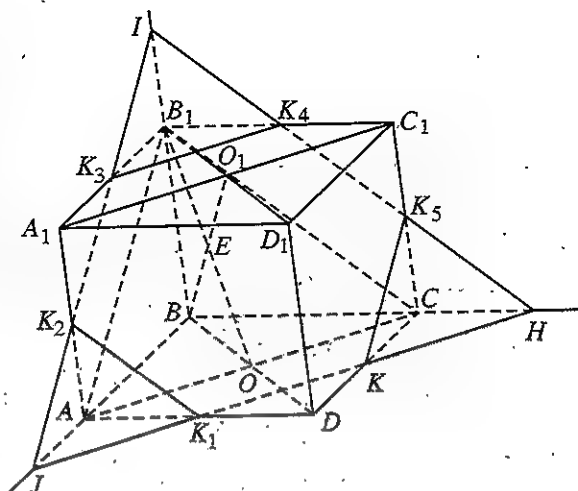
52. (h.105)

a) Gọi  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ . Để thấy  $B_1O_1OB$  là hình bình hành, nên trung điểm  $E$  của đường chéo  $BO_1$  cũng là trung điểm của đường chéo  $OB_1$ . Do đó  $E$  nằm trên  $OB_1$ . Mà  $OB_1$  nằm trên  $mp(ACB_1)$ . Vậy  $E$  nằm trên  $mp(ACB_1)$ .

b) Theo câu a) thì  $mp(ACB_1)$  cũng là  $mp(EAC)$ . Do đó

$(P)$  là mặt phẳng qua  $K$  và song song với  $mp(ACB_1)$ . Từ  $K$  kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AD$ ,  $AB$ ,  $BC$  lần lượt tại  $K_1$ ,  $J$ ,  $H$ . Từ  $J$  kẻ đường thẳng song song với  $AB_1$ , cắt  $AA_1$ ,  $A_1B_1$ ,  $BB_1$  lần lượt tại  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $I$ . Nối  $I$  và  $H$  cắt  $B_1C_1$ ,  $C_1C$  tại  $K_4$  và  $K_5$ .

Để thấy thiết diện là lục giác  $KK_1K_2K_3K_4K_5$  có các cạnh đối song song với nhau.



Hình 105

53. (h.106)

a) Trong  $mp(ABB'A')$  nối  $M$  với  $B'$  cắt  $AA'$  tại  $K$ .

Trong  $mp(ABC)$  nối  $M$  với  $E$  cắt  $CB$  tại  $D$ .

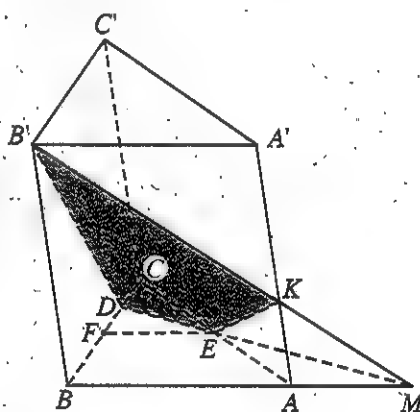
Thiết diện là tứ giác  $DEKB'$ .

b) Kẻ  $EF \parallel AB$  ( $F \in CB$ ). Khi đó  $EF$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  và  $EF = \frac{AB}{2}$ . Xét tam giác  $DBM$  ta có

$$\frac{FD}{BD} = \frac{EF}{BM} = \frac{1}{3}$$

Suy ra  $FD = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}FC$ , tức  $D$  là trung điểm của  $FC$ .

$$\text{Vậy } \frac{BD}{CD} = 3.$$



Hình 106

54. (h.107)

a) Ta có  $IJ$  là đường trung bình của tam giác  $C'AB$ , nên  $IJ \parallel AB$ . Mà  $AB$  nằm trên  $mp(ABB'A')$ . Vậy  $IJ \parallel (ABB'A')$ .

Chúng minh tương tự, ta có

$$JK \parallel (ACC'A'), IK \parallel (BCC'B').$$

b) Xét ba mặt phẳng  $(C'AB)$ ,  $(A'BC)$ ,  $(B'AC)$ . Ta có

$$(C'AB) \cap (A'BC) = BI$$

$$(C'AB) \cap (B'AC) = AJ$$

$$(B'AC) \cap (A'BC) = CK.$$

Vậy theo định lí giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng  $BI$ ,  $AJ$ ,  $CK$  đồng quy tại một điểm.

c) Theo câu a), ta có

$$\left. \begin{array}{l} IJ \parallel AB \\ JK \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow (IJK) \parallel (ABC).$$

d) Dễ thấy  $O$  là trọng tâm tam giác  $C'AB$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $C'O$  với  $AB$  thì  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Vậy ba điểm  $M$ ,  $G$ ,  $C$  thẳng hàng.

Vì  $O$  và  $G$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $C'AB$  và  $CAB$  nên ta có

$$\frac{MO}{MC'} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow OG \parallel CC'. \quad (1)$$

Chúng minh tương tự  $OG' \parallel CC'. \quad (2)$

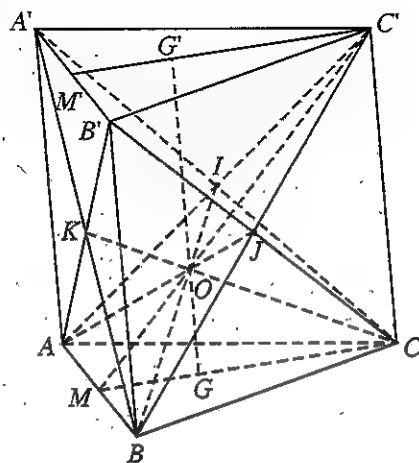
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm  $O$ ,  $G$ ,  $G'$  thẳng hàng.

55. (h.108)

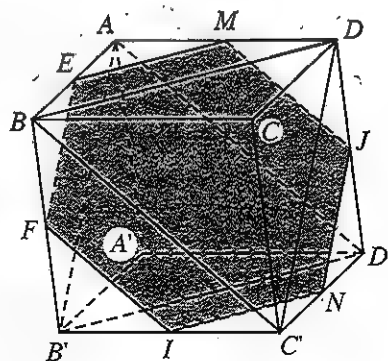
a) Theo giả thiết, ta có

$$\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{D'C'}.$$



Hình 107



Hình 108

Theo định lí Ta-lét đảo ta có  $MN, AD', DC'$  cùng song song với một mặt phẳng  $(P)$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $AD'$  và  $DC'$ . Nhưng  $AD' \parallel BC'$  nên mặt phẳng  $(P)$  song song với mp $(C'BD)$ . Từ đó, ta có  $MN \parallel (C'BD)$ .

b) Từ  $M$  kẻ  $ME \parallel BD$ , cắt  $AB$  tại  $E$ ; từ  $E$  kẻ đường thẳng  $EF \parallel AB'$ , cắt  $BB'$  tại  $F$ ; từ  $F$  kẻ đường thẳng  $FI \parallel BC'$ , cắt  $B'C'$  tại  $I$ ; từ  $N$  kẻ đường thẳng  $NJ \parallel CD$  cắt  $D'D$  tại  $J$ . Để thấy thiết diện là lục giác  $MEFINJ$  có các cạnh đối lần lượt song song với ba cạnh của tam giác  $C'BD$ .

56. (h.109)

a) Để thấy  $QR$  là đường trung bình của tam giác  $C'BD$  nên  $QR \parallel BD$ . Mà  $BD$  nằm trên mp $(ABCD)$ , suy ra

$$QR \parallel (ABCD). \quad (1)$$

Lí luận tương tự ta có

$$PQ \parallel (ABCD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $(PQRS) \parallel (ABCD)$ .

b) Theo câu a), ta có  $QR \parallel (ABCD)$  suy ra mặt phẳng  $(AQR)$  cắt mp $(ABCD)$  theo một giao tuyến song song với  $BD$ . Giao tuyến này cắt  $CD$  tại  $N$ . Nối  $N$  với  $R$  cắt  $DD'$  và  $CC'$  lần lượt tại  $E$  và  $M$ . Nối  $M$  với  $Q$  cắt  $BB'$  tại  $F$ . Để thấy thiết diện là hình bình hành  $AEMF$ .

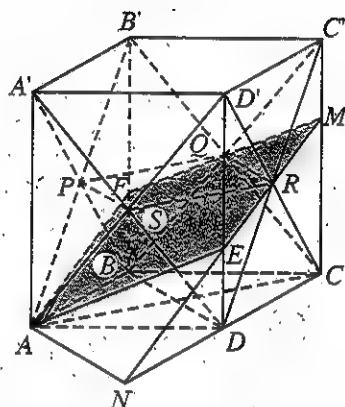
c) Do  $AN \parallel BD$  suy ra  $D$  là trung điểm của  $CN$ , để thấy

$$\triangle EDR = \triangle MCR \Rightarrow DE = MC'.$$

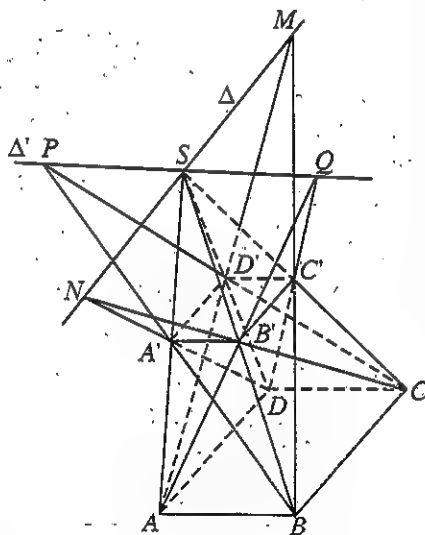
Mặt khác  $DE \parallel CM$

$$\text{suy ra } \frac{DE}{CM} = \frac{ND}{NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MC'}{MC} = \frac{1}{2}.$$

57. (h.110) Gọi  $S$  là điểm đồng quy của các cạnh  $AA', BB', CC', DD'$ . Vì  $BC$  song song với  $AD$  nên giao tuyến  $\Delta$  của hai mặt phẳng  $(BB'C'C)$ ,  $(AA'D'D)$  đi



Hình 109



Hình 110

qua  $S$  và song song với  $BC$ . Rõ ràng  $M, N$  là hai điểm chung của hai mặt phẳng nói trên. Do đó  $M, N$  đều thuộc  $\Delta$ . Lí luận tương tự, hai điểm  $P, Q$  thuộc giao tuyến  $\Delta'$  của hai mặt phẳng  $(ABB'A')$  và  $(CDD'C')$  (giao tuyến này đi qua  $S$  và song song với  $AB$ ). Vậy bốn điểm  $M, N, P, Q$  cùng nằm trên  $mp(\Delta, \Delta')$ .

## §5. Phép chiếu song song

58. (h.111)

a) Qua  $BC$  ta dựng một mặt phẳng  $(P)$  không đi qua  $A$ . Trong mặt phẳng  $(P)$  ta dựng tam giác cân  $BCA_1$  ( $BA_1 = CA_1$ ). Khi đó, phép chiếu song song lên  $mp(P)$  theo phương chiếu  $l = AA_1$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác cân  $A_1BC$ .

b) Trong  $(P)$  ở câu a), ta dựng tam giác đều  $BCA_2$  và chọn phương chiếu  $l = AA_2$ .

c) Trong  $(P)$  ở câu a), ta dựng tam giác vuông  $BCA_3$  ( $\widehat{BA_3C} = 90^\circ$ ) và chọn phương chiếu  $l = AA_3$ .

59. (h.112)

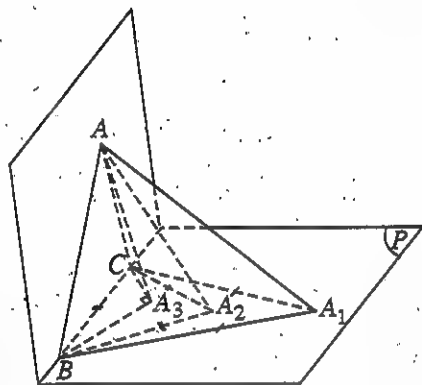
Vì phương chiếu  $l$  là đường thẳng  $AB$  nên hình chiếu của đoạn thẳng  $AB$  là giao điểm của  $AB$  và  $(P)$ .

Do đó  $AB \cap (P) = A' \equiv B'$ .

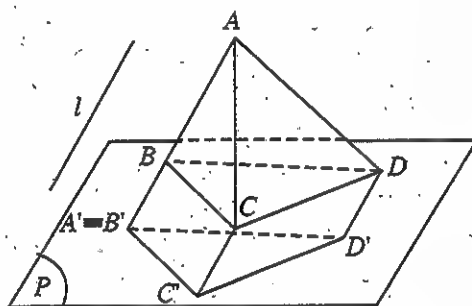
$C$  và  $D$  có hình chiếu là  $C'$  và  $D'$ . Vậy hình chiếu của tứ diện  $ABCD$  lên  $mp(P)$  theo phương chiếu  $AB$  là tam giác  $A'C'D'$ .

60. (h.113)

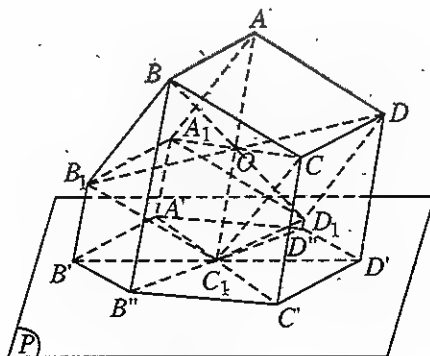
Chọn mặt phẳng chiếu  $(P)$  qua  $C_1$  và không chứa  $A$ . Gọi  $O$  là tâm của hình hộp. Khi đó hình chiếu của các điểm  $A, O, C_1$  là điểm  $C_1$ .



Hình 111



Hình 112



Hình 113

Hình chiếu của đoạn thẳng  $B_1D$  là đoạn thẳng  $B'D'$  nhận  $C_1$  làm trung điểm.  
 Hình chiếu của đoạn thẳng  $CA_1$  là đoạn thẳng  $C'A'$  nhận  $C_1$  làm trung điểm.  
 Hình chiếu của đoạn thẳng  $BD_1$  là đoạn thẳng  $B''D''$  nhận  $C_1$  làm trung điểm.

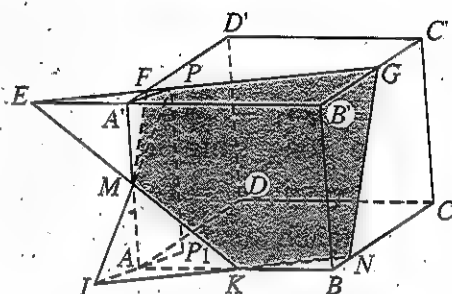
Vậy hình chiếu của hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  lên  $mp(P)$  theo phương chiếu  $AC_1$  là lục giác  $A'B'B''C'D'D''$  có các cạnh đối song song và bằng nhau.

61. Thông thường là một hình tứ giác  $ABCD$  và hai đường chéo  $AC, BD$  có các nét khuất, nét liền.

62. (h.114)

Trước hết, ta tìm giao điểm của đường thẳng  $PM$  với mặt phẳng  $(ABCD)$ .

Gọi  $P_1$  là hình chiếu song song của  $P$  trên  $mp(ABCD)$  theo phương chiếu  $AA'$ . Khi đó  $PM$  cắt  $P_1A$  tại  $I$ . Vì  $I$  thuộc  $mp(ABCD)$  nên  $IN$  cắt  $AB$  tại  $K$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $KM$  với  $A'B'$ . Nối  $E$  với  $P$  cắt  $A'D'$  và  $B'C'$  lần lượt tại  $F$  và  $G$ . Vậy thiết diện là ngũ giác  $MKNGF$ .



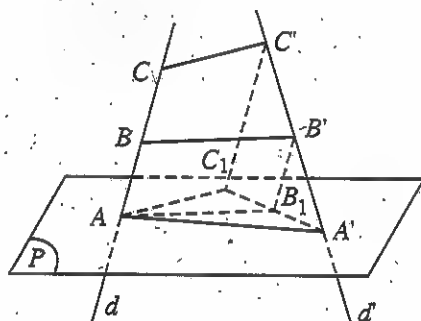
Hình 114

63. (h.115)

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $AA'$  và song song với  $BB'$ . Theo định lý Ta-lét, ta cũng có  $CC' \parallel mp(P)$ . Xét phép chiếu song song lên  $mp(P)$  theo phương chiếu  $d$ , ta được hình chiếu của  $A', B', C'$  tương ứng là  $A', B_1, C_1$ . Khi đó ba điểm  $A', B_1, C_1$  thẳng hàng. Ta có  $C'C_1 \parallel CA$  và vì  $CC' \parallel mp(P)$  nên giao tuyến  $AC_1$  của  $mp(CC'C_1A)$  với  $mp(P)$  song song với  $CC'$ . Do đó tứ giác  $CC'C_1A$  là hình bình hành, nên  $AC_1 = CC'$ .

Tương tự như vậy, ta cũng chứng minh được  $AB_1 = BB'$ . Ta phải chứng minh  $AA' + AC_1 > 2AB_1$ .

Thật vậy, vì  $B'$  là trung điểm của  $A'C'$  nên  $B_1$  là trung điểm của cạnh  $A'C_1$  của tam giác  $AA'C_1$ . Từ đó dễ thấy tổng hai cạnh  $AA'$  và  $AC_1$  trong tam giác  $AA'C_1$  lớn hơn hai lần trung tuyến ứng với cạnh thứ ba.



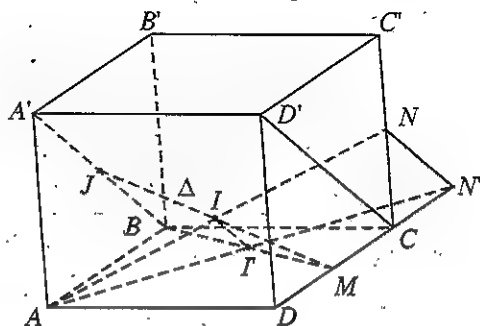
Hình 115



64. (h.116)

a) Giả sử đã dựng được đường thẳng  $\Delta$  cần tìm cắt cả  $AN$  và  $BA'$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là giao điểm của  $\Delta$  với  $AN$  và  $BA'$ .

Xét phép chiếu song song lên mp( $ABCD$ ) theo phương chiếu  $A'B$ . Khi đó ba điểm  $J, I, M$  lần lượt có hình chiếu là  $B, I, M$ . Do đó ba điểm  $B, I, M$  thẳng hàng. Gọi  $N'$  là hình chiếu của  $N$  thì  $AN'$  là hình chiếu của  $AN$ . Vì  $I$  thuộc  $AN$  nên  $I$  thuộc  $AN'$ . Vậy  $I$  là giao điểm của  $BM$  và  $AN'$ .



Hình 116

Từ phân tích ở trên ta có thể dựng đường thẳng  $\Delta$  theo các bước sau đây :

- Lấy giao điểm  $I$  của  $AN'$  và  $BM$ .
- Trong mp( $ANN'$ ) dựng  $II' \parallel NN'$  (đã có  $NN' \parallel CD'$ ) cắt  $AN$  tại  $I$ .
- Vẽ đường thẳng  $MI$ , đó là đường thẳng  $\Delta$  cần tìm.

Để chứng minh được, đường thẳng  $\Delta$  nói trên cắt  $BA'$ .

b) Để thấy  $MC = CN'$

suy ra  $MN' = CD = AB$ .

Do đó  $I$  là trung điểm của  $BM$ .

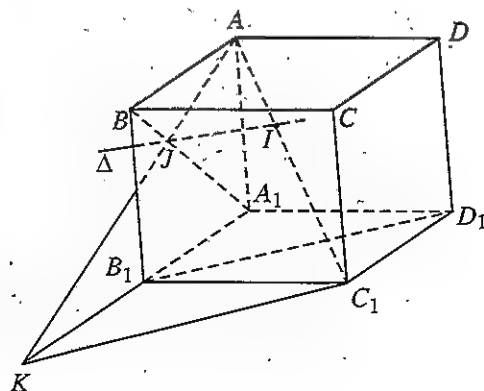
Mặt khác  $II' \parallel JB$ , nên  $II'$  là đường trung bình của tam giác  $MBJ$ , suy ra

$$IM = IJ \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = 1.$$

65. (h.117)

a) Giả sử đã xác định được đường thẳng  $\Delta$  cắt  $AC_1$  và  $BA_1$  lần lượt tại  $I$  và  $J$ .

Xét phép chiếu song song lên mp( $ABB_1A_1$ ) theo phương chiếu  $D_1B_1$ . Khi đó, hình chiếu của ba điểm thẳng hàng  $A, I, C_1$  lần lượt là ba điểm thẳng hàng  $A, J, K$ . Mặt khác  $J$  thuộc  $BA_1$ , nên  $J$  chính là giao điểm của  $AK$  và  $BA_1$ .



Hình 117

Từ đó, ta có cách dựng đường thẳng  $\Delta$  theo các bước sau đây :

– Dựng điểm  $K$  là hình chiếu của  $C_1$  (theo phương chiếu  $D_1B_1$ ).

– Lấy giao điểm  $J$  của  $AK$  và  $BA_1$ .

– Qua  $J$  dựng đường thẳng  $\Delta \parallel C_1K$  (đã có  $C_1K \parallel B_1D_1$ ) ta được đường thẳng  $\Delta$  cần tìm.

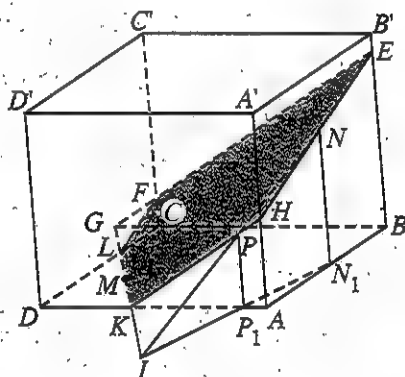
b) Dễ thấy  $A_1B_1 = B_1K \Rightarrow A_1K = 2AB$  (do  $A_1B_1 = AB$ ).

$$\text{Vì } AB \parallel A_1K \Rightarrow \frac{AJ}{JK} = \frac{AB}{A_1K} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } IJ \parallel C_1K \Rightarrow \frac{AI}{IC_1} = \frac{AJ}{JK} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AI}{AC_1} = \frac{1}{3}.$$

66. (h.118)

a) Giả sử  $M, N, P$  lần lượt là các điểm trong của các mặt phẳng  $(ABCD)$ ,  $(ABB'A')$ ,  $(ADD'A')$  xác định như hình vẽ. Trước hết ta tìm giao điểm  $I$  của  $PN$  với  $\text{mp}(ABCD)$ . Ta xét phép chiếu song song lên  $\text{mp}(ABCD)$  theo phương chiếu  $AA'$ . Các điểm  $N, P$  có hình chiếu lần lượt là  $N_1, P_1$  ( $N_1 \in AB, P_1 \in AD$ ). Khi đó  $I$  là giao điểm của  $PN$  với  $P_1N_1$ .



Hình 118

Trong  $\text{mp}(ABCD)$  nối  $I$  và  $M$  lần lượt cắt  $DA, DC$  và  $CB$  tại  $K, L, G$ .

Trong mặt phẳng  $(AA'D'D)$  nối  $K$  và  $P$  cắt  $AA'$  tại  $H$ .

Trong mặt phẳng  $(AA'B'B)$  nối  $H$  và  $N$  cắt  $BB'$  tại  $E$ .

Trong mặt phẳng  $(BCC'B')$  nối  $E$  và  $G$  cắt  $CC'$  tại  $F$ .

Vậy thiết diện là ngũ giác  $EFLKH$ .

b) Làm tương tự như câu a).

67. (h.119)

c) *Chứng minh*

$$\forall \quad AA_1 \parallel GG' \parallel II'$$

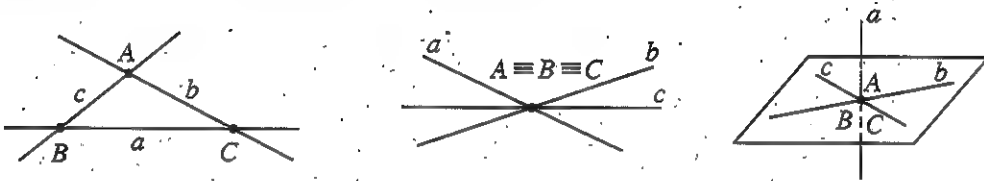
$$\text{nên} \quad \frac{AI}{AG} = \frac{A_1I'}{A_1G'} = \frac{3}{2}$$

suy ra  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

d) *Biện luận*. Bài toán có một nghiệm hình.

## Bài tập ôn tập chương II

68. (h.120)



Hình 120

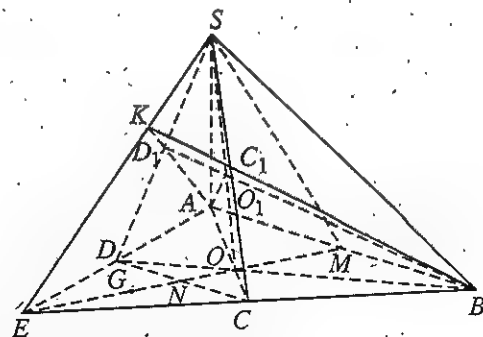
Ta nhận thấy rằng : Nếu ba đường thẳng bất kì trong  $n$  đường thẳng ( $n \geq 3$ ) đã cho đồng quy thì  $n$  đường thẳng đó đồng quy. Còn nếu tồn tại ba đường thẳng không đồng quy mà từng đôi một cắt nhau tại ba điểm  $A, B, C$  thì rõ ràng  $A, B, C$  không thẳng hàng. Khi đó các đường thẳng còn lại đều cắt ba đường thẳng nói trên nên chúng đều thuộc  $mp(ABC)$  (trái với giả thiết). Vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $n = 3$ .

Giả sử ba đường thẳng đã cho là  $a, b$  và  $c$ ;  $A, B, C$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $b$  và  $c, c$  và  $a, a$  và  $b$ . Nếu các điểm  $A, B, C$  phân biệt từng cặp thì dễ thấy  $a, b, c$  đều thuộc  $mp(ABC)$  (trái với giả thiết). Vậy các điểm  $A, B, C$  phải trùng nhau. Do đó ba đường thẳng  $a, b, c$  đồng quy.

69. (h.121)

a) Gọi  $N$  là giao điểm của  $EM$  và  $CD$ . Do  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $AB \parallel CD$  nên  $N$  cũng là trung điểm của  $CD$ ; suy ra  $G$  thuộc  $EM$ , hay  $G \in mp(SEM)$ , tức là các điểm  $S, E, M, G$  thuộc  $mp(SEM)$ .

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  thì đường thẳng  $MN$  đi qua  $O$ . Vậy



Hình 121

ba mặt phẳng  $(SEM)$ ,  $(SAC)$  và  $(SBD)$  đều có chung hai điểm  $S$  và  $O$  nên  $SO$  chính là giao tuyến chung  $\Delta$  của ba mặt phẳng trên.

b) Vì  $K$  thuộc  $AD_1$  và  $BC_1$  nên tương ứng  $K$  thuộc  $mp(SAD)$  và  $mp(SBC)$ . Do đó  $K$  nằm trên giao tuyến  $SE$  của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ . Vậy ba điểm  $S, E, K$  thẳng hàng.

Điểm  $O_1$  nằm trên  $AC_1$  và  $BD_1$  nên  $O_1$  phải thuộc  $(SAC)$  và  $(SBD)$  (do  $AC_1 \subset (SAC)$ ,  $BD_1 \subset (SBD)$ ). Từ đó, suy ra  $O_1$  phải thuộc giao tuyến  $\Delta$  của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$ .

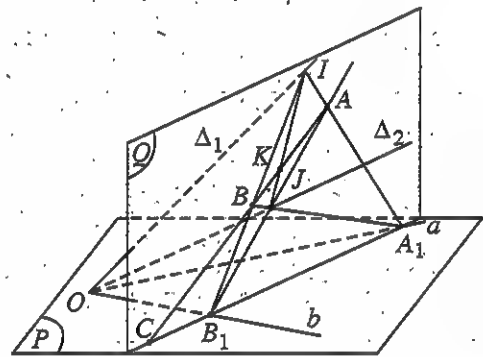
70. (h.122)

a) Mặt phẳng  $(Q)$  và mặt phẳng  $(P)$  có ba điểm chung là  $A_1, B_1$  và  $C$  nên ba điểm đó phải thẳng hàng; tức là đường thẳng  $A_1B_1$  luôn đi qua điểm cố định  $C$ .

b) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} I \in AA_1 \\ AA_1 \subset mp(A, a) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in mp(A, a);$$

$$\left. \begin{array}{l} I \in BB_1 \\ BB_1 \subset mp(B, b) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in mp(B, b).$$



Hình 122

Từ đó, suy ra  $I$  thuộc giao tuyến  $\Delta_1$  của hai mặt phẳng  $(B, b)$  và  $(A, a)$ . Do hai mặt phẳng này cố định nên đường thẳng  $\Delta_1$  cố định.

Chứng minh tương tự, điểm  $J$  chạy trên đường thẳng cố định  $\Delta_2$  là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định  $mp(A, b)$  và  $mp(B, a)$ . (Chú ý  $\Delta_1, \Delta_2$  đều đi qua  $O$ ).

c) Hai đường thẳng  $IJ, AB$  đều thuộc  $mp(Q)$  và chúng không thể song song nên chúng cắt nhau tại một điểm  $K$ .

$$\left. \begin{array}{l} K \in IJ \\ IJ \subset mp(\Delta_1, \Delta_2) \end{array} \right\} \Rightarrow K \in mp(\Delta_1, \Delta_2).$$

Mặt khác  $K$  thuộc  $AB$ . Do đó  $K$  chính là giao điểm của đường thẳng cố định  $AB$  với  $mp(\Delta_1, \Delta_2)$  cố định nên  $K$  cố định. Vậy đường thẳng  $IJ$  luôn đi qua điểm  $K$  cố định.

71. (h.123)

a) Ta có

$$\frac{IG_1}{IS} = \frac{IG_2}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel SC.$$

Mặt khác  $MJ$  là đường trung bình của tam giác  $DSC$  nên  $MJ \parallel SC$ . Từ đó, suy ra  $G_1G_2 \parallel MJ$ .

b) Rõ ràng tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng; ta chỉ cần chứng minh chúng cắt nhau từng đôi.

Lấy hai đường thẳng bất kì trong tám đường thẳng trên (chẳng hạn như hai đường thẳng  $MG_2$  và  $JG_1$ ). Theo câu a) thì  $G_1G_2 \parallel MJ$ , do đó  $MG_2$  và  $JG_1$  nằm trong mp( $G_1G_2JM$ ). Vậy  $MG_2$  và  $JG_1$  cắt nhau.

Vậy theo bài 68 (chương II), ta có tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng và từng đôi cắt nhau nên chúng đồng quy tại một điểm  $G$ .

c) Xét mp( $ABCD$ ). Dễ thấy

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -3\overrightarrow{OG_2} \text{ (vì } G_2 \text{ là trọng tâm tam giác } ABC)$$

$$\Rightarrow O, G_2, D \text{ thẳng hàng và } OD = 3OG_2.$$

Xét ba mặt phẳng ( $G_1G_2JM$ ), ( $G_2MD$ ), ( $SIJ$ ). Ta có

$$(G_1G_2JM) \cap (G_2MD) = G_2M$$

$$(G_1G_2JM) \cap (SIJ) = G_1J$$

$$(G_2MD) \cap (SIJ) = SO.$$

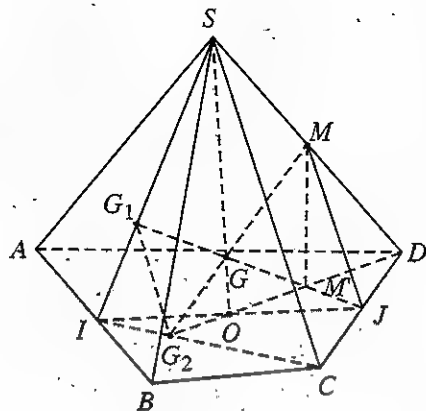
Vậy  $G_2M$ ,  $G_1J$  và  $SO$  đồng quy. Theo kết quả câu b) thì  $G_2M$  và  $G_1J$  cắt nhau tại  $G$ . Vậy điểm  $G$  nằm trên  $SO$ .

Kẻ  $MM'$  song song với  $SO$  và cắt  $G_2D$  tại  $M'$ , ta có

$$OM' = M'D = \frac{1}{2}OD = \frac{3}{2}OG_2 \text{ và } \frac{OG}{MM'} = \frac{OG_2}{G_2M'} = \frac{OG_2}{\frac{5}{2}OG_2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow OG = \frac{2}{5}MM' = \frac{1}{5}SO$$

$$\Rightarrow GS = 4GO.$$



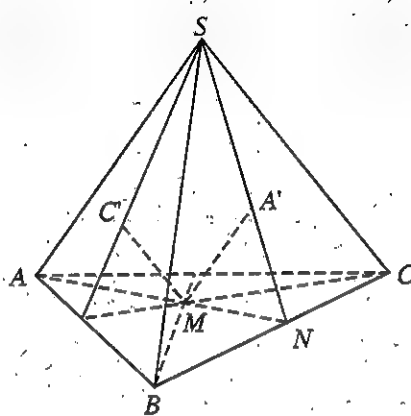
Hình 123

72. (h.124)

a) Vì  $AM \parallel SA$  nên có mp( $MA'$ ,  $SA$ ). Mặt phẳng này và mặt phẳng ( $ABC$ ) có ba điểm chung  $A, M, N$ . Do đó ba điểm  $A, M, N$  phải nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng nói trên. Vậy ba điểm đó phải thẳng hàng.

Kéo dài  $AM$  cắt  $BC$  tại  $N$ . Trong mp( $SAN$ ) kẻ  $MA'$  song song với  $SA$  cắt  $SN$  tại  $A'$ . Điểm  $A'$  là điểm cần tìm.

Tương tự xác định được các điểm  $B', C'$ .



Hình 124

b) Dễ thấy  $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{MN}{AN}$

mà  $\frac{MN}{AN} = \frac{MA'}{SA}$

Vậy  $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{MA'}{SA}$

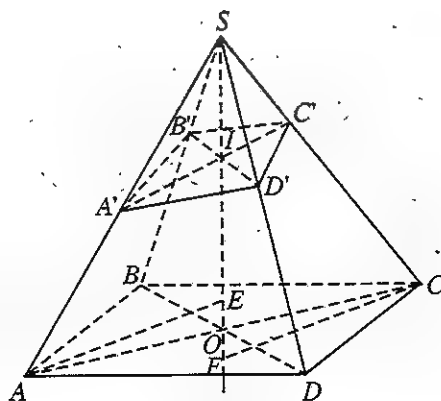
c) Chứng minh tương tự như câu b), ta có

$$\frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = \frac{MB'}{SB}, \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{MC'}{SC}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} &= \frac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1. \end{aligned}$$

73. a) (h.125)

Trong mp( $SAC$ ) nối  $A'$  với  $C'$  cắt  $SO$  tại  $I$ . Trong mp( $SBD$ ) nối  $B'$  với  $I$  cắt  $SD$  tại  $D'$ . Khi đó  $D'$  chính là giao điểm của mp( $P$ ) với  $SD$ .



Hình 125

b) (h.126)

Trong mp(SAC), kẻ  $AE \parallel A'C'$  cắt  $SO$  tại  $E$ ;  
kẻ  $CF \parallel A'C'$  cắt  $SO$  tại  $F$ . Ta có :

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SE}{SI} = \frac{SO - OE}{SI} \quad (1)$$

$$\frac{SC}{SC'} = \frac{SF}{SI} = \frac{SO + OF}{SI} \quad (2)$$

Do  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $AE \parallel CF$ ,  
nên  $OE = OF$ .

$$\text{Vậy từ (1) và (2), suy ra } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2SO}{SI} \quad (3)$$

c) Chứng minh tương tự như câu b), ta có

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SI} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$

74. (h.127)

$$\left. \begin{array}{l} a) \ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABC) \\ (\alpha) \cap (ABC) = PQ \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel AC.$$

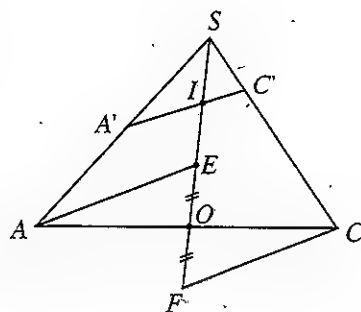
$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ACD) \\ (\alpha) \cap (ACD) = RS \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel AC.$$

Từ trên, suy ra  $PQ \parallel RS (\parallel AC)$ . (1)

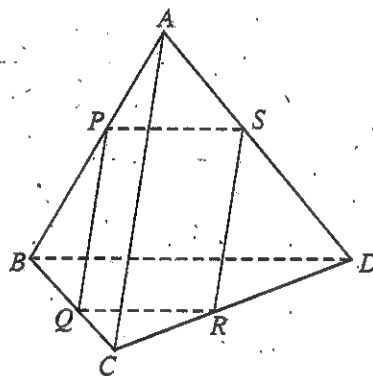
Chứng minh tương tự, ta có

$$PS \parallel QR (\parallel BD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $PQRS$  là hình bình hành.



Hình 126



Hình 127



b) Vì  $PS \parallel BD \Rightarrow \frac{PS}{BD} = \frac{PA}{AB}$

nên  $PS = \frac{BD}{AB} \cdot PA.$  (3)

Vì  $PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB}$

nên  $PQ = \frac{AC}{AB} \cdot PB.$  (4)

Tứ giác  $PQRS$  là hình thoi khi và chỉ khi  $PS = PQ$

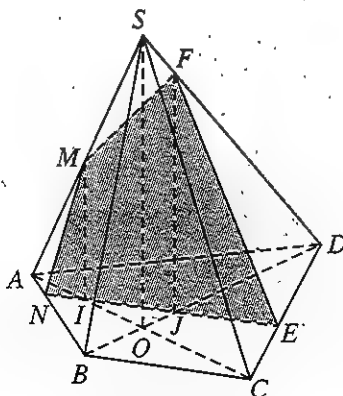
$$\Leftrightarrow BD \cdot PA = AC \cdot PB$$

$$\Leftrightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BD}.$$
 (5)

Vậy tứ giác  $PQRS$  là hình thoi khi và chỉ khi  $mp(\alpha)$  qua điểm  $P$  (được xác định bởi (5)) đồng thời song song với cả  $AC$  và  $BD$ .

75. a) (h.128)

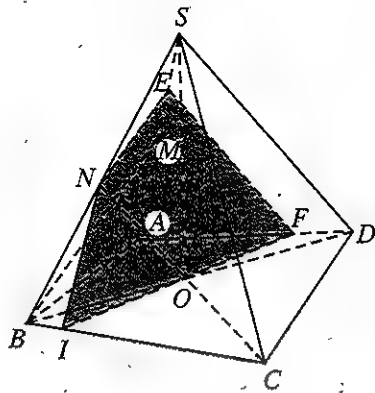
Qua  $M$  ta kẻ đường thẳng  $MI$  song song với  $SO$  cắt  $AC$  tại  $I$ . Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB, CD, DB$  lần lượt tại  $N, E, J$ . Qua  $J$  kẻ đường thẳng song song với  $SO$  cắt  $SD$  tại  $F$ . Tứ giác  $MNEF$  là thiết diện cần tìm.



Hình 128

b) (h.129).

Trong mp( $SBD$ ), qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $SD$  cắt cạnh  $SB$  tại  $N$ . Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $BM$  cắt  $SA$  tại  $E$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng song song với  $SD$  cắt  $AD$  tại  $F$ . Nối  $F$  với  $O$  cắt  $BC$  tại  $I$ . Tứ giác  $NEFI$  là thiết diện cần tìm.



Hình 129

76. (h.130)

a)  $MN$  là đường trung bình của hình thang  $ABCD$ , suy ra

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (SBC).$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel (SBC) \\ ME \parallel (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow (MEN) \parallel (SBC).$$

b) Ta có

$$EF \parallel AD \Rightarrow EF \parallel MN.$$

$$\Rightarrow EF \subset (MNE) \Rightarrow F \in (MNE).$$

Mặt khác  $F \in SD$ , do đó  $F = (MNE) \cap SD$ .

Thiết diện là hình thang  $MNFE$ .

c) Theo câu a), ta có  $(SBC) \parallel (MNE)$

mặt khác  $SC \subset (SBC)$ .

Suy ra  $SC \parallel (MNE)$ .

Đường thẳng  $AF$  không song song với mp( $SBC$ ) vì nếu  $AF \parallel (SBC)$  thì

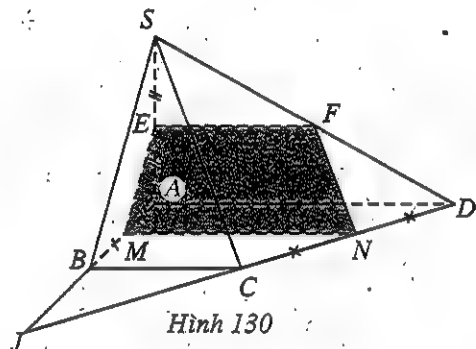
$$AF \subset (MNE) \Rightarrow A \in (MNE) \text{ (vô lý)}.$$

d) Xét ba mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(SCD)$  và  $(MNE)$ . Ta có :

$$(SAB) \cap (SCD) = SJ \text{ (} J \text{ là giao điểm của } AB \text{ và } CD \text{)}$$

$$(SAB) \cap (MNE) = ME$$

$$(SCD) \cap (MNE) = NF.$$



Hình 130

Theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng  $SJ$ ,  $ME$ ,  $NF$  đồng quy. Vậy điểm  $I$  phải di động trên đường thẳng  $SJ$  (trừ những điểm trong của đoạn  $SJ$ ).

77. (h.131)

a) Gọi  $O_1$  là giao điểm của  $A_1C_1$  và  $B_1D_1$ . Khi đó

$$(A_1BC_1) \cap (BDD_1B_1) = BO_1.$$

Gọi  $G$  là giao điểm của  $B_1D$  và  $BO_1$  thì  $G$  chính là giao điểm của  $B_1D$  với mp( $A_1BC_1$ ). Để thấy

$\triangle GBD \sim \triangle GO_1B_1$ , tỉ số đồng dạng là 2 (do  $\frac{BD}{B_1O_1} = 2$ ).

$$\text{Vậy } B_1G = \frac{1}{2}GD$$

và  $GO_1 = \frac{1}{2}GB$ , suy ra  $G$  là trọng tâm tam giác  $A_1BC_1$ .

b) Để thấy  $AC \parallel A_1C_1$ ,  $D_1A \parallel C_1B \Rightarrow (D_1AC) \parallel (BA_1C_1)$ .

Chứng minh tương tự như câu a), ta có trọng tâm  $G'$  của tam giác  $D_1AC$  nằm trên đường chéo  $DB_1$  và  $DG' = \frac{1}{2}G'B_1$ . Từ đó và kết quả của câu a), suy ra  $G$  và  $G'$  chia đường chéo  $B_1D$  thành ba phần bằng nhau.

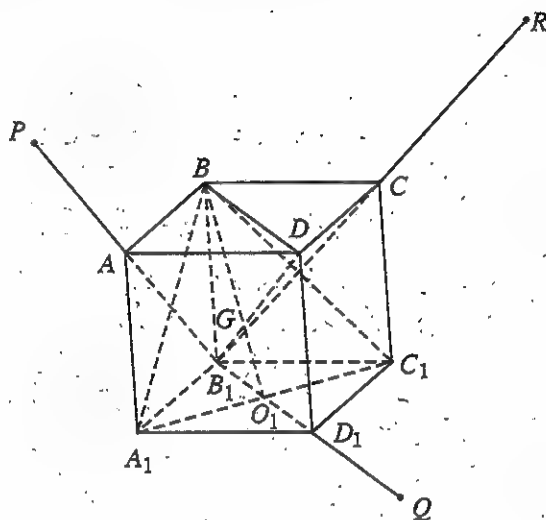
$$\text{Vậy } B_1G' = \frac{2}{3}B_1D.$$

c) Do  $A, D_1, C$  lần lượt là trung điểm của  $PB_1, QB_1, RB_1$  nên

$$PQ \parallel AD_1, QR \parallel D_1C, RP \parallel CA.$$

Từ đó, suy ra  $(PQR) \parallel (AD_1C)$ .

Mặt khác, theo câu b), ta có  $(D_1AC) \parallel (BA_1C_1)$ , nên  $(PQR) \parallel (BA_1C_1)$ .



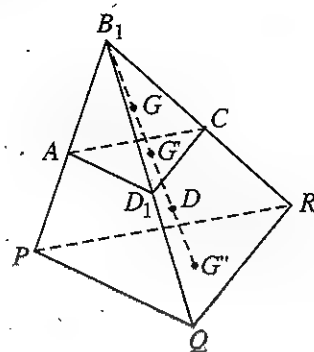
Hình 131

d) (h.132)

Vì  $A, D_1, C$  lần lượt là trung điểm của  $B_1P, B_1Q, B_1R$  nên trọng tâm  $G''$  của tam giác  $PQR$  phải nằm trên đường thẳng  $B_1G'$

và  $B_1G'' = 2B_1G'$ . Mặt khác  $B_1G' = \frac{2}{3}B_1D$ ,

nên  $B_1G'' = \frac{4}{3}B_1D \Rightarrow B_1D = \frac{3}{4}B_1G''$ .



Hình.132

Vậy  $D$  là trọng tâm tứ diện  $B_1PQR$ .

*Chú ý.* Sau khi học vectơ trong không gian, ta có thể dùng phương pháp vectơ để

giải bài toán này một cách ngắn gọn hơn bằng cách đặt  $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{a}, \overrightarrow{B_1B} = \vec{b},$

$\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{c}$  và chứng minh  $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DR} = \vec{0}$ .

### Bài tập trắc nghiệm chương II

1. (C).

2. (C).

3. (D).

4. (B).

5. (D).

6. (C).

7. (C).

8. (B).

9. (D).

10. (D).

11. (B).

12. (C).

13. (B).

14. (D).

## **VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC**

### **A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI**

#### **§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ**

##### **I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN**

*Định nghĩa vectơ và các phép toán vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng. Ngoài ra cần biết :*

1. Quy tắc hình hộp để cộng vectơ trong không gian.

2. Khái niệm và điều kiện đồng phẳng của ba vectơ, cụ thể :

a) Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  gọi là đồng phẳng nếu ba đường thẳng chứa chúng cùng song song với một mặt phẳng.

b) + Điều kiện để ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng là có các số  $m, n, p$  không đồng thời bằng 0 sao cho  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ .

+ Cho hai vectơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khi đó, ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng khi và chỉ khi có các số  $m, n$  sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ . Hơn nữa, các số  $m, n$  là duy nhất.

c) Nếu ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng thì với mỗi vectơ  $\vec{d}$  đều có thể viết dưới dạng  $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ , với các số  $m, n, p$  xác định duy nhất.

##### **II - ĐỀ BÀI**

- Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $M$  và  $N$  là các điểm lần lượt thuộc  $AB$  và  $CD$  sao cho  $\vec{MA} = -2\vec{MB}$ ,  $\vec{ND} = -2\vec{NC}$ ; Các điểm  $I, J, K$  lần lượt thuộc  $AD, MN, BC$  sao cho  $\vec{IA} = k\vec{ID}$ ,  $\vec{JM} = k\vec{JN}$ ,  $\vec{KB} = k\vec{KC}$ . Chứng minh rằng các điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.

2. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ ; Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $CA$  và  $DC'$  sao cho  $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC}'$ . Xác định  $m$  để các đường thẳng  $MN$  và  $BD'$  song song với nhau. Khi ấy, tính  $MN$  biết  $\widehat{ABC} = \widehat{ABB}' = \widehat{CBB}' = 60^\circ$  và  $BA = a, BB' = b, BC = c$ .
3. Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $BB'$  và  $A'C'$ . Điểm  $K$  thuộc  $B'C'$  sao cho  $\overrightarrow{KC}' = -2\overrightarrow{KB}'$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $A, I, J, K$  cùng thuộc một mặt phẳng.
4. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng  $(P)$  bất kì không đi qua  $S$ , cắt các cạnh bên  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Dùng phương pháp vector, chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1}.$$

5. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh bằng  $m$ , các góc tại  $A$  bằng  $60^\circ$  ( $\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$ ). Gọi  $P$  và  $Q$  là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC}'$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $PQ$  đi qua trung điểm của cạnh  $BB'$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $PQ$ .
6. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $D_1, D_2, D_3$  lần lượt là điểm đối xứng của điểm  $D'$  qua  $A, B', C$ . Chứng tỏ rằng  $B$  là trọng tâm của tứ diện  $D_1D_2D_3D'$ .
7. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là các điểm thuộc  $AD'$  và  $DB$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD}', \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$  ( $k \neq 0, k \neq 1$ ).
- Chứng minh rằng  $MN$  luôn song song với  $mp(A'BC)$ .
  - Khi đường thẳng  $MN$  song song với đường thẳng  $A'C$ , chứng tỏ rằng  $MN$  vuông góc với  $AD'$  và  $DB$ .
8. Cho hình tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $m$ . Các điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .
- Tính độ dài  $MN$ .
  - Tính góc giữa đường thẳng  $MN$  với các đường thẳng  $BC, AB$  và  $CD$ .
9. Cho hình tứ diện  $ABCD$ ;  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ;  $M$  là điểm thuộc  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$ ;  $N$  là điểm thuộc  $BD$  sao cho

$\overline{NB} = k_2 \overline{ND}$ . Chứng minh rằng các điểm  $I, J, M, N$  cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi  $k_1 = k_2$ .

10. Cho ba tia  $Ox, Oy, Oz$  không đồng phẳng.

a) Đặt  $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{yOz} = \beta, \widehat{zOx} = \gamma$ . Chứng minh rằng

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}.$$

b) Gọi  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  lần lượt là các tia phân giác của các góc  $xOy, yOz, zOx$ . Chứng minh rằng nếu  $Ox_1$  và  $Oy_1$  vuông góc với nhau thì  $Oz_1$  vuông góc với cả  $Ox_1$  và  $Oy_1$ .

11. Trong không gian cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  khác vectơ – không.

a) Nếu có  $\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0}$  thì ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có đồng phẳng không?

b) Giả sử có  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  trong đó  $m, n, p$  là các số thực. Với điều kiện nào của  $m, n, p$  thì ba vectơ đó đồng phẳng?

12. Cho hai đường thẳng  $\Delta, \Delta_1$  cắt ba mặt phẳng song song  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  lần lượt tại  $A, B, C$  và  $A_1, B_1, C_1$ . Với điểm  $O$  bất kì trong không gian, đặt  $\overline{OI} = \overline{AA_1}, \overline{OJ} = \overline{BB_1}, \overline{OK} = \overline{CC_1}$ . Chứng minh rằng ba điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.

13. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J, H, K, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, CD, BC, AD, AC, BD$ . Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

14. Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy các điểm  $M, N, P, Q$  lần lượt thuộc  $AB, BC, CD, DA$  sao cho  $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BC}, \overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{AD}, \overline{DP} = k\overline{DC}$ . Hãy xác định  $k$  để bốn điểm  $P, Q, M, N$  cùng nằm trên một mặt phẳng.

15. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Một đường thẳng  $\Delta$  cắt các đường thẳng

$AA', BC, C'D'$  lần lượt tại  $M, N, P$  sao cho  $\overline{NM} = 2\overline{NP}$ . Tính  $\frac{MA}{MA'}$ .

**§2, §3, §4. Hai đường thẳng vuông góc.  
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.  
Hai mặt phẳng vuông góc**

**I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN**

1. a) Góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là góc giữa hai đường thẳng  $a_1$  và  $a_2$  cùng đi qua một điểm, lần lượt song song (hoặc trùng) với  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

Nếu  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  lần lượt là vectơ chỉ phương của  $\Delta_1, \Delta_2$  và  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$  thì góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  bằng  $\alpha$  hoặc  $180^\circ - \alpha$  tùy theo  $\alpha \leq 90^\circ$  hoặc  $\alpha > 90^\circ$ .

b) Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ , với  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  lần lượt là vectơ chỉ phương của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

2. a) + Đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đó.

+ Để đường thẳng  $a$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  điều kiện cần và đủ là  $a$  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng  $(P)$ .

+ Có duy nhất một mặt phẳng  $(P)$  đi qua một điểm  $O$  cho trước và vuông góc với đường thẳng  $a$  cho trước.

Có duy nhất một đường thẳng  $\Delta$  đi qua một điểm  $O$  cho trước và vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  cho trước.

Mặt phẳng đi qua trung điểm  $O$  của đoạn thẳng  $AB$  và vuông góc với  $AB$  gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn  $AB$ .

Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng đó.

Tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác  $ABC$  là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

b) Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng  $a$  có hình chiếu trên mặt phẳng  $(P)$  là đường thẳng  $a'$ . Khi đó một đường thẳng  $b$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với  $a$  khi và chỉ khi nó vuông góc với  $a'$ .



c) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (nếu hình chiếu đó là một điểm thì xem góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng  $90^\circ$ ).

3. a) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

b) + Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

+ Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là một trong hai mặt phẳng đó chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

$$+ \left. \begin{array}{l} a = (P) \cap (Q) \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (R).$$

## II - ĐỀ BÀI

16. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình thoi, cạnh bên  $SA = AB$  và  $SA$  vuông góc với  $BC$ .

a) Tính góc giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BC$ .

b) Gọi  $I, J$  lần lượt là các điểm thuộc  $SB$  và  $SD$  sao cho  $IJ \parallel BD$ . Chứng minh rằng góc giữa  $AC$  và  $IJ$  không phụ thuộc vào vị trí của  $I$  và  $J$ .

17. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh bằng  $a$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ ,  $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$ .

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng  $AB$  với  $A'D$  và  $AC'$  với  $B'D$ .

b) Tính diện tích các hình  $A'B'CD$  và  $ACC'A'$ .

c) Tính góc giữa đường thẳng  $AC'$  và các đường thẳng  $AB, AD, AA'$ .

18. Cho tứ diện  $ABCD$  trong đó góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng  $\alpha$ . Gọi  $M$  là điểm bất kỳ thuộc cạnh  $AC$ , đặt  $AM = x$  ( $0 < x < AC$ ). Xét mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M$  và song song với  $AB, CD$ .

- a) Xác định vị trí điểm  $M$  để diện tích thiết diện của hình tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi  $\text{mp}(P)$  đạt giá trị lớn nhất.
- b) Chứng minh rằng chu vi thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào  $x$  khi và chỉ khi  $AB = CD$ .
19. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành, mặt bên  $SAB$  là tam giác vuông tại  $A$ . Với điểm  $M$  bất kì thuộc cạnh  $AD$  ( $M$  khác  $A$  và  $D$ ), xét mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M$  và song song với  $SA, CD$ .
- a) Thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $\text{mp}(\alpha)$  là hình gì ?
- b) Tính diện tích thiết diện theo  $a$  và  $b$  ; biết  $AB = a, SA = b, M$  là trung điểm của  $AD$ .
20. Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy các điểm  $M$  và  $N$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $BC$  và  $AD$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$  và  $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$  với  $k$  là số thực khác 0 cho trước. Đặt  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BA}$  ;  $\beta$  là góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CD}$ . Tìm mối liên hệ giữa  $AB$  và  $CD$  để  $\alpha = \beta = 45^\circ$ .
21. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J, H, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AC, AD, BD$ . Hãy tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  trong các trường hợp sau :
- a) Tứ giác  $IJHK$  là hình thoi có đường chéo  $IH$  bằng  $\sqrt{3}IJ$ .
- b) Tứ giác  $IJHK$  là hình chữ nhật.
22. Cho hai tam giác cân  $ABC$  và  $DBC$  có chung cạnh đáy  $BC$  và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.
- a) Chứng minh rằng  $AD$  vuông góc với  $CB$ .
- b) Gọi  $M$  và  $N$  là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng  $AB$  và  $DB$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BC$ .
23. Cho tứ diện  $ABCD$  có  $CD = \frac{4}{3}AB$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AC, BD$ . Cho biết  $JK = \frac{5}{6}AB$ , tính góc giữa đường thẳng  $CD$  với các đường thẳng  $IJ$  và  $AB$ .
24. Cho tứ diện  $ABCD$  có  $BC = AD = a, AC = BD = b, AB = CD = c$ . Đặt  $\alpha$  là góc giữa  $BC$  và  $AD$  ;  $\beta$  là góc giữa  $AC$  và  $BD$  ;  $\gamma$  là góc giữa  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng trong ba số hạng  $a^2 \cos \alpha, b^2 \cos \beta, c^2 \cos \gamma$  có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

25. Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Lấy các điểm  $I, J, K$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $BC, AC, AD$  sao cho  $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KD}$  trong đó  $k$  là số khác 0 cho trước. Chứng minh rằng :
- $MN \perp IJ$  và  $MN \perp JK$ .
  - $AB \perp CD$ .
26. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành và  $SA = SC, SB = SD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .
- Chứng minh rằng  $SO \perp mp(ABCD)$ .
  - Gọi  $d$  là giao tuyến của  $mp(SAB)$  và  $mp(SCD)$ ;  $d_1$  là giao tuyến của  $mp(SBC)$  và  $mp(SAD)$ . Chứng minh rằng  $SO \perp mp(d, d_1)$ .
27. Cho hai hình chữ nhật  $ABCD, ABEF$  nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường chéo  $AC$  và  $BF$  vuông góc. Gọi  $CH$  và  $FK$  lần lượt là hai đường cao của hai tam giác  $BCE$  và  $ADF$ . Chứng minh rằng :
- $ACH$  và  $BFK$  là các tam giác vuông.
  - $BF \perp AH$  và  $AC \perp BK$ .
28. a) Cho tứ diện  $DABC$  có các cạnh bằng nhau. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $D$  trên  $mp(ABC)$  và  $I$  là trung điểm của  $DH$ . Chứng minh rằng tứ diện  $IABC$  có  $IA, IB, IC$  đôi một vuông góc.
- b) Cho tứ diện  $IABC$  có  $IA = IB = IC$  và  $IA, IB, IC$  đôi một vuông góc;  $H$  là hình chiếu của  $I$  trên  $mp(ABC)$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $I$ . Chứng minh tứ diện  $DABC$  có các cạnh bằng nhau.
29. Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SB$  vuông góc với  $mp(ABC)$ ,  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ .
- Chứng minh rằng  $ACS$  là tam giác vuông.
  - Tính  $SA, SB, SC$  biết rằng  $\widehat{ACB} = \alpha, \widehat{ACS} = \beta$  và  $BC = a$ .
30. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với  $mp(ABCD)$ ,  $SA = a$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .
- Tính độ dài các cạnh  $SB, SC, SD$ .
  - Gọi  $I$  là trung điểm của  $SC$ . Chứng minh rằng  $IB = ID$ .

31. Chứng minh rằng nếu các cặp cạnh đối diện của tứ diện  $ABCD$  vuông góc với nhau từng đôi một thì trong bốn mặt của tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn (cả ba góc của nó đều nhọn).
32. Cho tứ diện  $ABCD$ , đáy là tam giác cân và  $DA \perp mp(ABC)$ ,  $AB = AC = a$ ,  $BC = \frac{6}{5}a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Vẽ  $AH$  vuông góc với  $MD$  ( $H$  thuộc đường thẳng  $MD$ ).
- Chứng minh rằng  $AH \perp mp(BCD)$ .
  - Cho  $AD = \frac{4}{5}a$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DM$ .
  - Gọi  $G_1, G_2$  lần lượt là các trọng tâm của tam giác  $ABC$  và tam giác  $DBC$ . Chứng minh rằng  $G_1G_2 \perp mp(ABC)$ .
33. Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $SA = a$ .
- Gọi  $D_1$  là trung điểm của  $SD$ . Chứng minh rằng  $AD_1 \perp (SCD)$ .
  - Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ ,  $M$  là điểm thay đổi trên  $SD$ . Chứng minh rằng hình chiếu của điểm  $O$  trên  $CM$  thuộc đường tròn cố định.
34. Trong mặt phẳng  $(P)$  cho hai điểm  $A$  và  $B$  phân biệt. Đoạn thẳng  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng nằm trong  $(P)$  và đi qua điểm  $B$ ,  $H$  là chân đường vuông góc kẻ từ điểm  $S$  đến  $\Delta$ .
- Chứng minh rằng điểm  $H$  thuộc một đường tròn cố định khi  $\Delta$  thay đổi.
  - Gọi  $AK$  là đường cao của tam giác  $SAH$ ;  $AI$  là đường cao của tam giác  $SAB$ . Chứng minh rằng điểm  $K$  thuộc đường tròn cố định khi  $\Delta$  thay đổi; Xác định vị trí của đường thẳng  $\Delta$  để diện tích tam giác  $AKI$  đạt giá trị lớn nhất.
  - Hãy xác định vị trí của đường thẳng  $\Delta$  để độ dài  $SH$  đạt giá trị lớn nhất hoặc bé nhất.
35. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Lấy điểm  $S$  bất kỳ trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  kẻ từ điểm  $A$  ( $S \neq A$ ). Gọi  $B_1, C_1$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên  $SB$  và  $SC$ . Chứng minh rằng khi điểm  $S$  thay đổi thì
- Giao tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$  và mặt phẳng  $(AB_1C_1)$  là đường thẳng cố định và là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ ;
  - Đường thẳng  $B_1C_1$  đi qua điểm cố định  $I$  và  $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$ .

36. Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác không cân và  $SA$  vuông góc với  $mp(ABC)$ . Gọi  $AB_1, AC_1$  lần lượt là các đường cao của tam giác  $SAB$  và  $SAC$ .
- Chứng minh rằng  $B_1C_1$  và  $BC$  là hai đường thẳng cắt nhau.
  - Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $BC$  và  $B_1C_1$ . Chứng minh rằng  $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$ .
37. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi, đường chéo  $AC = 4a$ , đường chéo  $BD = 2a$ ;  $O$  là giao điểm của  $AC$  với  $BD$  và  $SO$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $SO = h$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $SC$  tại điểm  $C_1$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa  $a$  và  $h$  để điểm  $C_1$  nằm trong đoạn thẳng  $SC$ ,  $C_1$  khác  $S$  và khác  $C$ . Khi đó, tính diện tích thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi  $mp(\alpha)$ .
38. Trong mặt phẳng  $(P)$  cho đường tròn  $(\mathcal{C})$  đường kính  $AC = 2R$ . Gọi  $H$  là điểm thuộc  $AC$  ( $0 < AH < 2R$ ). Một đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $H$  cắt đường tròn  $(\mathcal{C})$  tại hai điểm  $B$  và  $D$ . Gọi  $S$  là điểm cố định sao cho  $SA$  vuông góc với  $(P)$ , đặt  $SA = h$ . Một mặt phẳng  $(Q)$  đi qua điểm  $A$  và vuông góc với  $SC$  cắt các đường thẳng  $SB, SC, SD, SH$  lần lượt tại các điểm  $B_1, C_1, D_1, H_1$ .
- Chứng minh rằng tứ giác  $AB_1C_1D_1$  nội tiếp một đường tròn.
  - Đường thẳng  $\Delta$  phải thoả mãn điều kiện gì để  $H_1$  là trung điểm của  $B_1D_1$ ?
  - Đường thẳng  $\Delta$  phải thoả mãn điều kiện gì để  $AB_1C_1D_1$  là hình vuông?
39. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$  và  $SA = a$ .
- Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp  $S.ABCD$  là các tam giác vuông.
  - Từ  $A$  kẻ  $AB_1 \perp SB, AD_1 \perp SD$ . Chứng tỏ rằng  $mp(AB_1D_1) \perp SC$ .  
Gọi  $C_1$  là giao điểm của  $SC$  với  $mp(AB_1D_1)$ . Chứng tỏ rằng tứ giác  $AB_1C_1D_1$  có hai đường chéo vuông góc và tính diện tích của tứ giác đó.
40. Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  kẻ từ  $A$ . Với điểm  $M$  bất kì thuộc  $\Delta$ ,  $M \neq A$ , gọi  $K$  là trực tâm của tam giác  $MBC$  và  $\Delta_1$  là đường thẳng đi qua  $K$  và vuông góc với mặt phẳng  $(MBC)$ . Chứng minh rằng :
- $\Delta_1$  đi qua điểm cố định khi  $M$  thay đổi trên  $\Delta$ .

- b)  $\Delta_1$  cắt  $\Delta$  tại điểm  $N$  và  $BM$  vuông góc với  $CN$ ,  $CM$  vuông góc với  $BN$ . Xác định vị trí điểm  $M$  để độ dài  $MN$  đạt giá trị bé nhất.
41. Cho tứ diện  $SABC$ , hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  vuông góc với nhau và có  $SA$  vuông góc với  $mp(ABC)$ ,  $SB = a\sqrt{2}$ ,  $\widehat{BSC} = 45^\circ$ ,  $\widehat{ASB} = \alpha$ .
- a) Chứng minh rằng  $BC$  vuông góc với  $SB$ . Tìm điểm cách đều các điểm  $S, A, B, C$ .
- b) Xác định  $\alpha$  để hai mặt phẳng  $(SCA)$  và  $(SCB)$  tạo với nhau góc  $60^\circ$ .
42. Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $S$  là điểm trong không gian sao cho  $SAB$  là tam giác đều và  $mp(SAB)$  vuông góc với  $mp(ABCD)$ .
- a) Chứng minh rằng  $mp(SAB) \perp mp(SAD)$  và  $mp(SAB) \perp mp(SBC)$ .
- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .
- c) Gọi  $H$  và  $I$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $mp(SHC) \perp mp(SDI)$ .
43. Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với tâm  $O$ ,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Lấy điểm  $S$  trong không gian sao cho  $SO$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ , đặt  $SO = h$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .
- a) Tính góc giữa  $mp(SMN)$  với các mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa  $h$  và  $a$  để  $mp(SMN)$  vuông góc với các mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(SCD)$ .
- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ . Tính  $h$  theo  $a$  để hai mặt phẳng đó vuông góc.
44. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình chữ nhật,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy,  $SA = a$ . Tính :
- a) Các góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy của hình chóp.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên liên tiếp hoặc hai mặt bên đối diện của hình chóp.
45. Cho tứ diện  $ABCD$  có cạnh  $AD$  vuông góc với  $mp(DBC)$ . Gọi  $AE$ ,  $BF$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$ ;  $H$  và  $K$  lần lượt là trực tâm của tam giác  $ABC$  và tam giác  $DBC$ . Chứng minh rằng :
- a)  $mp(ADE) \perp mp(ABC)$  và  $mp(BFK) \perp mp(ABC)$  ;
- b)  $HK \perp mp(ABC)$ .

46. Trong mặt phẳng  $(P)$ , cho hình thoi  $ABCD$  với  $AB = a$ ,  $AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  tại giao điểm  $O$  của hai đường chéo của hình thoi, ta lấy điểm  $S$  sao cho  $SB = a$ . Chứng minh rằng :
- Tam giác  $ASC$  vuông.
  - Mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(SAD)$  vuông góc với nhau.
47. Cho tam giác cân  $ABC$ ,  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Xét hai tia cùng chiều  $Bt$ ,  $Ct'$  và vuông góc với mp( $ABC$ ). Lấy điểm  $B'$  thuộc  $Bt$ ,  $C'$  thuộc  $Ct'$  sao cho  $BB' = 3CC'$  và  $C' \neq C$ .
- Chứng minh rằng giao tuyến của mp( $ABC$ ) và mp( $AB'C'$ ) cố định khi  $B'$ ,  $C'$  thay đổi.
  - Khi  $BB' = a$ , tính góc giữa hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(ABC)$ , tính diện tích tam giác  $AB'C'$ .
48. Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cắt nhau theo giao tuyến  $\Delta$  và tạo với nhau góc  $\alpha$ . Xét hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt thuộc  $(P)$  và  $(Q)$ . Kẻ  $MI$  vuông góc với  $\Delta$ ,  $NJ$  vuông góc với  $\Delta$ . Cho biết  $MI = a$ ,  $NJ = b$ ,  $IJ = c$ . Tính độ dài  $MN$ .
49. Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  vuông góc với nhau theo giao tuyến  $\Delta$ . Lấy hai điểm  $A, B$  cố định thuộc  $\Delta$  sao cho  $AB = a$ . Gọi  $SAB$  là tam giác đều trong  $(P)$ ,  $ABCD$  là hình vuông nằm trong  $(Q)$ .
- Tính góc giữa mặt phẳng  $(SCD)$  với các mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .
  - Gọi  $O_1$  là giao điểm của hai đường thẳng  $B_1C$  và  $A_1D$ , ở đó  $A_1, B_1$  tương ứng là các trung điểm của  $SA, SB$ . Gọi  $H_1$  là giao điểm của đường cao  $SH$  của tam giác  $SAB$  với mp( $A_1B_1CD$ ). Chứng minh rằng  $SO_1$  vuông góc với  $SA$  và  $CD$ . Tính góc giữa mp( $A_1B_1O_1$ ) với các mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .
50. Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  cạnh đáy bằng  $a$ , đường cao  $SO = 2a$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc đường cao  $AA_1$  của tam giác  $ABC$ . Xét mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M$  và vuông góc với  $AA_1$ . Đặt  $AM = x$ .
- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp( $P$ ).
  - Tính diện tích thiết diện vừa xác định theo  $a$  và  $x$ . Xác định vị trí điểm  $M$  để diện tích thiết diện đó đạt giá trị lớn nhất.

51. Trong mp( $P$ ), cho hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = b$ ,  $BC = a$ . Gọi  $E$ ,  $F$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Trong mặt phẳng qua  $EF$  và vuông góc với ( $P$ ) vẽ nửa đường tròn đường kính  $EF$ . Gọi  $S$  là điểm bất kì trên nửa đường tròn đó.
- Chứng minh rằng mp( $SEF$ ) vuông góc với hai mặt phẳng ( $SAD$ ), ( $SBC$ ) và mp( $SAD$ ) vuông góc với mp( $SBC$ ).
  - Gọi  $H'$ ,  $K'$  lần lượt là hình chiếu của các trục tâm  $H$  và  $K$  của các tam giác  $SAD$  và  $SBC$  xuống ( $P$ ). Chứng minh rằng  $HH'.KK'$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $S$ .
52. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ .
- Tính góc tạo bởi hai đường thẳng  $AC'$  và  $A'B$ .
  - Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $A'B'$ ,  $BC$ ,  $DD'$ . Chứng minh rằng  $AC'$  vuông góc với mp( $MNP$ ).
53. Cho hình lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  cạnh đáy bằng  $a$ , chiều cao bằng  $h$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB'$  sao cho  $\frac{MA}{MB'} = \frac{5}{4}$ .
- Tính góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BC'$ .
  - Một mặt phẳng ( $P$ ) đi qua điểm  $M$  và song song với các đường thẳng  $A'C$  và  $BC'$  cắt đường thẳng  $CC'$  tại  $C_1$ , tính tỉ số  $\frac{C_1C}{C_1C'}$ .
54. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Xét tứ diện  $AB'CD'$ . Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mp( $ABC$ ). Tính diện tích thiết diện thu được. Hãy xét kết quả của bài toán khi  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp chữ nhật với ba kích thước là  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
55. Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $C_1$  là trung điểm của  $CC'$ .
- Tính góc giữa hai đường thẳng  $C_1B$  và  $A'B'$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng ( $C_1AB$ ) và ( $ABC$ ).
  - Chứng minh rằng hình chóp  $C_1.ABB'A'$  là hình chóp tứ giác đều.
  - Một mặt phẳng ( $P$ ) chứa cạnh  $AB$ , tạo với mặt phẳng đáy ( $ABC$ ) góc  $\varphi$  và cắt hình lăng trụ đã cho theo hình có diện tích khác không. Tính diện tích thiết diện đó theo  $a$  và  $\varphi$ .



## §5. Khoảng cách

### I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (hoặc một đường thẳng) là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng (hoặc trên đường thẳng).

2. Khoảng cách từ đường thẳng  $a$  đến mặt phẳng  $(P)$  song song với  $a$  là khoảng cách từ một điểm nào đó của  $a$  đến mặt phẳng  $(P)$ .

3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

4. + Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng cắt cả hai đường thẳng và vuông góc với hai đường thẳng đó.

Khi hai đường thẳng vuông góc với nhau và chéo nhau thì ta thường tìm đường vuông góc chung của chúng như sau:

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng thứ nhất và vuông góc với đường thẳng thứ hai tại điểm  $I$ . Đường vuông góc chung của chúng là đường thẳng đi qua  $I$  nằm trong  $(P)$  và vuông góc với đường thẳng thứ nhất.

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$  bằng :

- Độ dài của đoạn vuông góc chung  $IJ$  của  $a$  và  $b$ , trong đó  $I$  và  $J$  lần lượt là các giao điểm của đường vuông góc chung đó với  $a$  và  $b$ .

- Khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

### II - ĐỀ BÀI

56. Cho tứ diện  $ABCD$  có  $BC = BD = AC = AD$ ;  $AB = a$ ,  $CD = a\sqrt{3}$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ,  $IJ = a$ .

a) Chứng minh rằng  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$ .

b) Tính khoảng cách từ điểm cách đều bốn đỉnh  $A, B, C, D$  đến mỗi đỉnh đó.

57. Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông ở  $C$ , cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $AC = a$ ,  $BC = b$ ,  $SA = h$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $SB$ .

a) Tính độ dài  $MN$ .

- b) Tìm hệ thức liên hệ giữa  $a, b, h$  để  $MN$  là đường vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$ .
58. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có cạnh  $SA = x$ , tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng  $a$ .
- Chứng minh rằng  $SAC$  là tam giác vuông.
  - Tính đường cao  $SH$  của hình chóp đã cho.
59. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh  $SA$  vuông góc với mặt đáy và  $SA = a$ . Tính :
- Khoảng cách từ điểm  $S$  đến  $mp(A_1CD)$  trong đó  $A_1$  là trung điểm của  $SA$  ;
  - Khoảng cách giữa  $AC$  và  $SD$ .
60. Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\widehat{A} = 60^\circ$ , góc của đường chéo  $A'C$  và mặt phẳng đáy bằng  $60^\circ$ .
- Tính đường cao của hình hộp đó.
  - Tìm đường vuông góc chung của  $A'C$  và  $BB'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.
61. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Mặt bên  $SAB$  là tam giác cân tại  $S$  và  $mp(SAB)$  vuông góc với  $mp(ABCD)$ , cạnh bên  $SC$  tạo với mặt phẳng đáy góc  $\alpha$ . Tính :
- Chiều cao của hình chóp  $S.ABCD$  ;
  - Khoảng cách từ chân đường cao hình chóp đến mặt phẳng  $(SCD)$  ;
  - Diện tích thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng trung trực của cạnh  $BC$ .
62. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi,  $\widehat{A} = 120^\circ$ ,  $BD = a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng  $(SBC)$  và mặt phẳng đáy là  $60^\circ$ . Tính :
- Đường cao của hình chóp.
  - Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SCB)$ .
63. Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $C$ ,  $CA = b$ ,  $CB = a$ , cạnh  $SA = h$  vuông góc với đáy. Gọi  $D$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính :
- Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SD$  ;
  - Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SD$  ;
  - Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $SD$ .
64. Trong mặt phẳng  $(P)$  cho đường tròn  $(\mathcal{C})$  đường kính  $AB = 2R$  ;  $C$  là điểm bất kì thuộc đường tròn ( $C$  không trùng với  $A$  và  $B$ ).  $S$  là điểm trong không

- gian sao cho  $SA$  vuông góc với  $(P)$  và  $SA = h$  ( $h$  cho trước và  $h < 2R$ ). Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $SB$ . Hãy xác định vị trí điểm  $C$  trên đường tròn để  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$ . Khi đó, tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến  $mp(SBC)$ .
65. a) Hai mặt  $ABC$  và  $ABD$  của hình tứ diện  $ABCD$  là những tam giác có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  đi qua trung điểm của  $CD$ .
- b) Bốn mặt của hình tứ diện  $ABCD$  có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau, nghĩa là  $BC = AD$ ,  $AC = BD$ ,  $AB = CD$ .
66. Trên cạnh  $AD$  của hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , ta lấy điểm  $M$  với  $AM = x$  ( $0 < x < AD$ ) và trên nửa đường thẳng  $At$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  lấy điểm  $S$  sao cho  $AS = y$ .
- a) Tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .
- b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $SC$  và  $H$  là hình chiếu của  $I$  trên  $CM$ . Chứng minh rằng điểm  $H$  thuộc đường tròn cố định khi  $M$  chạy trên  $AD$  và  $S$  chạy trên  $At$ .
67. Cho  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ . Trên đường thẳng  $At$  vuông góc với  $mp(ABC)$  lấy điểm  $S$  với  $AS = b$ .
- a) Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  theo  $a, b$ .
- b)  $H_z$  là đường thẳng đi qua trục tâm  $H$  của tam giác  $SBC$  và vuông góc với  $mp(SBC)$ . Chứng minh rằng khi  $S$  di động trên  $At$  thì đường thẳng  $H_z$  luôn đi qua một điểm cố định.
68. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ .
- a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC'$  và  $A'B$ .
- b) Gọi  $M, N, P$  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh  $A'B', BC, DD'$  sao cho  $A'M = BN = DP$ . Chứng minh rằng trọng tâm tam giác  $MNP$  luôn thuộc đường thẳng cố định khi  $M, N, P$  thay đổi.
69. Đáy của hình chóp  $A.BCD$  là tam giác đều. Đường cao của hình chóp kẻ từ đỉnh  $A$  đi qua trung điểm  $H$  của cạnh  $CD$ . Cắt hình chóp đó bởi mặt phẳng song song với  $AB$  và  $CD$  và cách đỉnh  $B$  một khoảng bằng  $d$ . Tính diện tích thiết diện thu được, biết cạnh của tam giác đều  $BCD$  là  $a$  và  $AB = a\sqrt{2}$ .
70. Cắt hình lập phương bằng một mặt phẳng  $(P)$  đi qua một đường chéo của hình lập phương. Phải chọn  $(P)$  như thế nào để thiết diện thu được có diện tích nhỏ nhất?

## Bài tập ôn tập chương III

71. Cho  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$ ,  $A_1D_1$  của hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ .
- a) Xác định giao điểm  $P$  và  $Q$  của mặt phẳng  $(CMN)$  với các đường thẳng  $B_1C_1$  và  $DB_1$ .
- b) Hãy biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AQ}$  qua các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  trong đó  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$ .
72. Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Lấy các điểm  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  lần lượt thuộc các cạnh bên  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sao cho  $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{B'B_1}{BB'} = \frac{C'C_1}{CC'} = \frac{3}{4}$ . Trên các đoạn thẳng  $CA_1$  và  $A'B_1$  lần lượt lấy các điểm  $I$ ,  $J$  sao cho  $IJ \parallel B'C_1$ .  
 Tính tỉ số  $\frac{IJ}{B'C_1}$ .
73. Cho  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$  của tứ diện  $ABCD$ ;  $P$  là điểm thuộc đường thẳng  $AD$  sao cho  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$ ,  $k$  là số cho trước ( $k \neq 1$ ). Xác định điểm  $Q$  thuộc đường thẳng  $BC$  sao cho  $PQ$  và  $MN$  cắt nhau. Khi đó, hãy tính tỉ số  $\frac{QB}{QC}$ .
74. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  sao cho  $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$ ,  $\overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}$ ,  $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$ ,  $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$ . Với giá trị nào của  $k$  thì bốn điểm  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng?
75. Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng:
- a) Nếu  $ABCD$  là hình chữ nhật thì với mọi điểm  $M$  trong không gian ta luôn có  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ .
- b) Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$  trong không gian. Điều ngược lại có đúng không?
76. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang cân với các cạnh đáy  $AB = 2a$ ,  $CD = a$  và hai cạnh bên  $BC = AD = a$ ,  $SO$  vuông góc với mp( $ABC$ ) trong đó  $O$  là trung điểm của  $AB$ ,  $SO = a$ .

- a) Chứng minh rằng điểm cách đều các điểm  $S, A, B, C, D$  thuộc đường thẳng  $SO$ . Tính khoảng cách từ điểm đó đến mỗi đỉnh của hình chóp.
- b) Tính góc giữa đường thẳng  $SO$  và mp( $SCD$ ).
77. Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều,  $SA = SB = SC = a$  và cùng tạo với mặt phẳng ( $ABC$ ) góc  $60^\circ$ . Một mặt phẳng song song với hai cạnh chéo nhau của hình chóp và cắt hình chóp đó theo thiết diện là hình vuông. Tính diện tích thiết diện.
78. Cho tam giác đều  $ABC$  có chiều cao  $AH = 5a$ . Điểm  $O$  thuộc đoạn thẳng  $AH$  sao cho  $AO = a$ . Điểm  $S$  trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ( $ABC$ ) tại  $O$  và  $SO = 2a$ .
- a) Chứng minh  $AS$  và  $CS$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .
- b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $OH$ ; ( $\alpha$ ) là mặt phẳng đi qua điểm  $I$  và vuông góc với  $AH$ . Thiết diện của hình chóp  $S.ABC$  khi cắt bởi ( $\alpha$ ) là hình gì? Tính diện tích thiết diện.
79. Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ .  $AB = c, BC = a$ , cạnh bên  $AA' = h$ , trong đó  $h^2 > a^2 + c^2$ . Một mặt phẳng ( $P$ ) đi qua điểm  $A$  và vuông góc với  $CA'$ .
- a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi mp( $P$ ).
- b) Tính diện tích thiết diện.
80. Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  cạnh đáy bằng  $a$ .
- a) Tính góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng chứa hai mặt bên liên tiếp nếu chiều cao hình chóp bằng  $a$ .
- b) Xét mặt phẳng ( $P$ ) đi qua điểm  $A$ , song song với  $CD$  và vuông góc với mp( $SCD$ ), chia tam giác  $SCD$  thành hai phần với tỉ số diện tích bằng  $\frac{1}{8}$  (phần thứ nhất chứa đỉnh). Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng ( $P$ ).
81. Cho hai nửa mặt phẳng ( $P$ ) và ( $Q$ ) vuông góc với nhau theo giao tuyến  $\Delta$ . Trên  $\Delta$  lấy hai điểm  $A, B$  cố định với  $AB = a\sqrt{2}$  ( $a$  là độ dài cho trước). Trên nửa đường thẳng  $Ax$  vuông góc với  $\Delta$  và ở trong ( $P$ ) lấy điểm  $M$  khác  $A$ . Đặt  $AM = m$ . Trên nửa đường thẳng  $By$  vuông góc với  $\Delta$  và trong ( $Q$ ) lấy điểm  $N$  sao cho  $BN = \frac{a^2}{m}$ .

- a) Chứng minh các mặt của tứ diện  $ABMN$  là các tam giác vuông.
- b) Với giá trị nào của  $m$  thì  $MN$  có độ dài bé nhất? Tính giá trị đó.
- c) Chứng minh rằng chân mỗi đường cao của tứ diện đó xuất phát từ  $A$  và  $B$  nằm trên đường tròn cố định khi  $M$  thay đổi.

82. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Lấy điểm  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AD'$ , điểm  $N$  thuộc đoạn thẳng  $BD$  sao cho

$$AM = DN = x \quad (0 < x < a\sqrt{2}).$$

- a) Tìm  $x$  để đoạn thẳng  $MN$  có độ dài ngắn nhất.
  - b) Khi  $MN$  ngắn nhất, hãy chứng tỏ  $MN$  là đường vuông góc chung của  $AD'$  và  $DB$ , đồng thời  $MN \parallel A'C$ .
83. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $I$  là điểm thuộc cạnh  $AB$ ; đặt  $AI = x$  ( $0 < x < a$ ).

- a) Khi góc giữa hai đường thẳng  $AC'$  và  $DI$  bằng  $60^\circ$ , hãy xác định vị trí của điểm  $I$ .
- b) Tính theo  $a$  và  $x$  diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng  $(B'DI)$ . Tìm  $x$  để diện tích ấy là nhỏ nhất.
- c) Tính khoảng cách từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(B'DI)$  theo  $a$  và  $x$ .

84. Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $AD = b$ . Gọi  $S$  là điểm sao cho  $SA$  vuông góc với mp( $ABC$ ) và  $SA = h$  ( $h > 0$ ). Trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $M$  bất kì, đặt  $CM = x$ , ( $0 \leq x \leq a$ ).

- a) Tính diện tích tam giác  $SBM$  theo  $a, b, h, x$ .
- b) Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mp( $SBM$ ) khi  $M$  là trung điểm của  $CD$ .
- c) Gọi hình chiếu của điểm  $A$  và điểm  $D$  trên mp( $SBM$ ) lần lượt là  $A_1$  và  $D_1$ . Chứng minh rằng khi  $M$  thay đổi trên  $CD$  thì các điểm  $A_1$  và  $D_1$  mỗi điểm thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của mỗi đường tròn đó.

85. Cho  $ABC$  là tam giác cân có  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Điểm  $S$  thay đổi trong không gian nhưng luôn ở về một phía của mặt phẳng  $(ABC)$  và  $AS = a$ ,  $\widehat{SAB} = 60^\circ$ .

- a) Gọi  $H$  là hình chiếu của điểm  $S$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ . Chứng minh rằng  $H$  thuộc đường thẳng cố định và  $S$  thuộc đường tròn cố định, tính bán kính đường tròn đó.
- b) Chứng minh rằng khi độ dài  $SH$  đạt giá trị lớn nhất thì hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABC)$  vuông góc với nhau và khi đó hãy tính độ dài  $SC$ .

- c) Khi  $SBC$  là tam giác vuông tại  $S$ , hãy tính góc giữa hai đường thẳng  $SA$  với  $AC$  và khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng ( $SBC$ ).
86. Cho hình lăng trụ tứ giác đều  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $a\sqrt{6}$ . Xét đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$  và song song với  $BD$ . Gọi ( $P$ ) là mặt phẳng qua  $\Delta$  và điểm  $C'$ .
- Thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi  $mp(P)$  là hình gì? Tính diện tích thiết diện.
  - Tính góc giữa  $mp(P)$  và  $mp(ABCD)$ .
87. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật với  $AB = a, AD = b$ ; cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $AS = 2a$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì trên  $AS$ , đặt  $AM = x$  ( $0 \leq x \leq 2a$ ).
- Thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $mp(MBC)$  là hình gì? Tính diện tích thiết diện.
  - Tính khoảng cách từ điểm  $S$  đến  $mp(MBC)$  ứng với mỗi vị trí của  $M$ .
88. Cho hình chóp cắt tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có các cạnh đáy lần lượt là  $a, b$  ( $a > b$ ). Góc giữa đường thẳng chứa đường cao và mặt phẳng chứa mặt bên là  $\alpha$ . Tính:
- Chiều cao, trung đoạn, cạnh bên của hình chóp cắt đó (đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cắt đều);
  - Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp cắt đó.
89. Cho hình chóp cắt tứ giác đều  $ABCD.A'B'C'D'$  có đường cao bằng  $h$ . Góc giữa mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy bằng  $\alpha$ . Góc giữa đường thẳng  $A'C$  và mặt phẳng đáy bằng  $\beta$ . Tính:
- Cạnh đáy, trung đoạn của hình chóp cắt;
  - Diện tích xung quanh của hình chóp cắt đó.

### Bài tập trắc nghiệm chương III

- Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.
  - Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ cùng nằm trong một mặt phẳng;
  - Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng thì có  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$  với  $m, n$  là các số duy nhất;
  - Ba vectơ không đồng phẳng khi có  $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$  với  $\vec{d}$  là vectơ bất kì;
  - Cả ba mệnh đề trên đều sai.

2. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?
- (A) Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó ;
- (B) Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn ;
- (C) Góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $c$  khi  $b$  song song với  $c$  (hoặc  $b$  trùng với  $c$ ) ;
- (D) Góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $c$  thì  $b$  song song với  $c$ .
3. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?
- (A) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho ;
- (B) Góc giữa đường thẳng  $a$  và  $\text{mp}(P)$  bằng góc giữa đường thẳng  $b$  và  $\text{mp}(P)$  khi  $a$  và  $b$  song song (hoặc  $a$  trùng với  $b$ ) ;
- (C) Góc giữa đường thẳng  $a$  và  $\text{mp}(P)$  bằng góc giữa đường thẳng  $a$  và  $\text{mp}(Q)$  thì  $\text{mp}(P)$  song song với  $\text{mp}(Q)$  ;
- (D) Góc giữa đường thẳng  $a$  và  $\text{mp}(P)$  bằng góc giữa đường thẳng  $b$  và  $\text{mp}(P)$  thì  $a$  song song với  $b$ .
4. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?
- (A) Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn ;
- (B) Góc giữa  $\text{mp}(P)$  và  $\text{mp}(Q)$  bằng góc giữa  $\text{mp}(P)$  và  $\text{mp}(R)$  khi  $(Q)$  song song với  $(R)$  (hoặc  $(Q)$  trùng với  $(R)$ ) ;
- (C) Góc giữa  $\text{mp}(P)$  và  $\text{mp}(Q)$  bằng góc giữa  $\text{mp}(P)$  và  $\text{mp}(R)$  thì  $(Q)$  song song với  $(R)$  ;
- (D) Cả ba mệnh đề trên đều đúng.
5. Cho  $\text{mp}(P)$  và hai điểm  $A, B$  không nằm trong  $(P)$ . Đặt  $d_1 = d(A; (P))$  và  $d_2 = d(B; (P))$ . Trong các kết luận sau đây, kết luận nào đúng ?
- (A)  $\frac{d_1}{d_2} = 1$  khi và chỉ khi  $AB$  song song với  $(P)$  ;
- (B)  $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$  khi và chỉ khi đoạn thẳng  $AB$  cắt  $(P)$  ;
- (C) Nếu  $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$  thì đoạn thẳng  $AB$  cắt  $(P)$  ;
- (D) Nếu đường thẳng  $AB$  cắt  $(P)$  tại điểm  $I$  thì  $\frac{IA}{IB} = \frac{d_1}{d_2}$ .



6. Cho tứ diện  $ABCD$ ; kí hiệu  $h_1, h_2, h_3, h_4$  lần lượt là khoảng cách từ mỗi đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đối diện với đỉnh đó của hình tứ diện. Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau ?
- (A)  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$  chỉ xảy ra khi tứ diện đó là tứ diện đều ;
- (B)  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$  khi các mặt của tứ diện đó tương đương ;
- (C) Có tứ diện mà một trong bốn khoảng cách bằng độ dài một cạnh của tứ diện ;
- (D) Có tứ diện mà hai trong bốn khoảng cách bằng hai độ dài hai cạnh của tứ diện.
7. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Đường thẳng  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a$ . Góc giữa đường thẳng  $SC$  và  $mp(SAB)$  là  $\alpha$ , khi đó  $\tan \alpha$  nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?
- (A)  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; (B)  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ ;
- (C)  $\tan \alpha = 1$ ; (D)  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ .
8. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Đường thẳng  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $CD$  nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?
- (A)  $a$ ; (B)  $a\sqrt{2}$ ;
- (C)  $a\sqrt{3}$ ; (D)  $2a$ .
9. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Đường thẳng  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Khoảng cách từ  $M$  đến  $mp(SAB)$  nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?
- (A)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ; (B)  $a$ ;
- (C)  $a\sqrt{2}$ ; (D)  $2a$ .
10. Cho hình chóp  $S.ABCD$  trong đó  $SA, AB, BC$  đôi một vuông góc và  $SA = AB = BC = 1$ . Khoảng cách giữa hai điểm  $S$  và  $C$  nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?
- (A)  $\sqrt{2}$ ; (B)  $\sqrt{3}$ ;
- (C)  $2$ ; (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

11. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Đường thẳng  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a$ . Góc giữa  $mp(SCD)$  và  $mp(ABCD)$  là  $\alpha$ , khi đó  $\tan \alpha$  nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?
- (A)  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;                      (B)  $\tan \alpha = 1$  ;
- (C)  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ ;                      (D)  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ .
12. Cho tứ diện  $ABCD$ , có  $DA = DB = DC$  và  $\widehat{BDC} = 60^\circ$ ,  $\widehat{ADC} = 90^\circ$ ,  $\widehat{ADB} = 120^\circ$ . Trong các mặt của tứ diện đó :
- (A) Tam giác  $ABD$  có diện tích lớn nhất ;
- (B) Tam giác  $ACD$  có diện tích lớn nhất ;
- (C) Tam giác  $BCD$  có diện tích lớn nhất ;
- (D) Tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất.
13. Cho tứ diện  $ABCD$  có hai cặp cạnh đối diện vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Thiết diện là hình thang ;
- (B) Thiết diện là hình bình hành ;
- (C) Thiết diện là hình chữ nhật ;
- (D) Thiết diện là hình vuông.
14. Cho tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn ;
- (B) Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn ;
- (C) Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn ;
- (D) Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn.
15. Cho tứ diện  $ABCD$ . Xét hình hộp nhận các cạnh của tứ diện làm các đường chéo của các mặt của hình hộp (xem bài tập 50, chương II). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?
- (A) Hình hộp đó là hình hộp thoi (tất cả các mặt là hình thoi) khi tứ diện đó có hai cặp cạnh đối diện vuông góc ;
- (B) Hình hộp đó là hình hộp chữ nhật khi tứ diện đó có các cặp cạnh đối diện bằng nhau ;

- (C) Hình hộp đó là hình lập phương khi tứ diện đó là tứ diện đều.
- (D) Chỉ có một trong ba mệnh đề trên là đúng.
16. Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  với đường cao  $SH$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A)  $H$  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi các cạnh bên bằng nhau ;
- (B)  $H$  trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  khi góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau ;
- (C)  $H$  là trung điểm của một cạnh đáy khi hình chóp đó có một mặt bên vuông góc với mặt đáy ;
- (D)  $H$  thuộc cạnh của đáy thì hình chóp đó có một mặt bên vuông góc với đáy.
17. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xét mp( $A'BD$ ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Góc giữa mp( $A'BD$ ) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau ;
- (B) Góc giữa mp( $A'BD$ ) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau và phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương ;
- (C) Góc giữa mp( $A'BD$ ) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng  $\alpha$  mà  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- (D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.
18. Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông và có một cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Xét bốn mặt phẳng chứa bốn mặt bên và mặt phẳng chứa mặt đáy. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Có hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau ;
- (B) Có ba cặp mặt phẳng vuông góc với nhau ;
- (C) Có bốn cặp mặt phẳng vuông góc với nhau ;
- (D) Có năm cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

## B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### §1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ

1. (h.133). Cách 1.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ}. \quad (2)$$

Từ (2) ta có

$$k\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ}$$

$$\text{hay } k\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ}. \quad (3)$$

Từ (1), (3) ta có

$$(1-k)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}.$$

Chứng minh tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}.$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{IJ} = \frac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}.$$

$$\text{Từ đó, ta có } \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}.$$

Vậy ba điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.

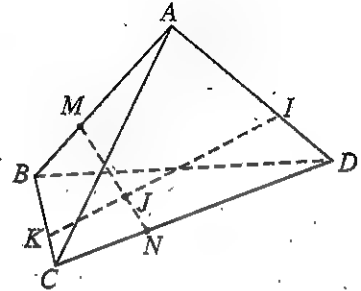
Cách 2.

$$\text{Vì } \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$$

$$\text{nên với điểm } O \text{ bất kì thì } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}.$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}}{3}; \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k}; \overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}}{1-k}.$$



Hình 133

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OJ} &= \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OD} - 2k\overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} [(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}] \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}.\end{aligned}$$

Mặt khác  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ .

Vậy ba điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.

2. (h.134)

Xác định  $m$ :

Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$  thì

$$\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Do  $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$  nên

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1-m} = \frac{\vec{c} - m\vec{a}}{1-m}.$$

Tương tự, ta có

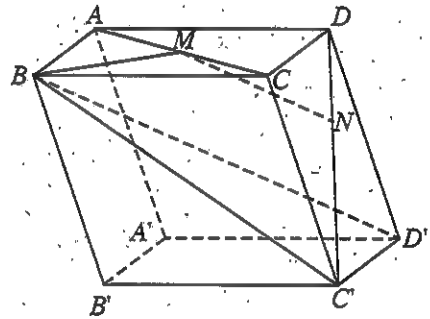
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN} &= \frac{\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC}}{1-m} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - m(\vec{b} + \vec{c})}{1-m} \\ &= \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$

Từ đó  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$

$$= \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}.$$

Do  $AC, BD'$  chéo nhau và  $DC', BD'$  chéo nhau nên

$$\begin{aligned}MN \parallel BD' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}.\end{aligned}$$



Hình 134

Mặt khác  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng nên điều ấy xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1+m}{1-m} = k \\ -\frac{m}{1-m} = k \\ -\frac{m}{1-m} = k. \end{cases}$$

Suy ra  $1+m = -m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ .

Từ đó, ta có  $k = \frac{1}{3}$ .

Vậy  $m = -\frac{1}{2}$  thì  $MN \parallel BD'$ .

Tính  $MN$ :

Khi ấy  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

do đó  $MN^2 = \frac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c})$

hay  $MN^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$

tức là  $MN = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$ .

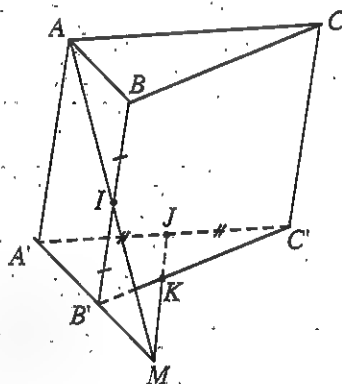
3. (h.135)

Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b}); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c}). \end{aligned} \quad (2)$$



Hình 135

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AK} &= \frac{\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{AB'}}{3} \\
 &= \frac{\vec{a} + \vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{3} \\
 &= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (1), (2), (3) ta có  $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$ .

Vậy  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}$  đồng phẳng, tức là các điểm  $A, I, J, K$  cùng thuộc một mặt phẳng.

*Chú ý.* Có thể chứng minh các điểm  $A, I, J, K$  thuộc một mặt phẳng bằng cách chứng minh  $AI$  và  $JK$  cắt nhau tại  $M$  (xem hình 135).

#### 4. (h.136)

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.$$

$$\text{Đặt } \overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA_1}, \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB_1},$$

$$\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC_1}, \overrightarrow{SD} = d\overrightarrow{SD_1}$$

(với  $a, b, c, d$  là các số lớn hơn 1).

$$\text{Khi đó } \frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = a + c$$

$$\frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1} = b + d$$

$$\text{và } \overrightarrow{SD_1} = \frac{1}{d} \cdot \overrightarrow{SD} = \frac{1}{d}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$$

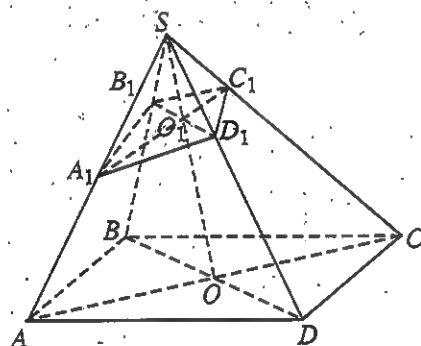
$$= \frac{1}{d}(a\overrightarrow{SA_1} + c\overrightarrow{SC_1} - b\overrightarrow{SB_1})$$

$$= \frac{a}{d} \cdot \overrightarrow{SA_1} + \frac{c}{d} \cdot \overrightarrow{SC_1} - \frac{b}{d} \cdot \overrightarrow{SB_1}.$$

Mặt khác, các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  thuộc mặt phẳng, nên từ đẳng thức đó suy ra

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} - \frac{b}{d} = 1,$$

tức là  $a + c = b + d$ .



Hình 136

Như vậy  $\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1}$ .

5. (h.137)

• Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ .

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}m^2$

và  $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BB'$  thì

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}.$$

Do  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A} = -\vec{a} - \vec{c}$

nên  $\overrightarrow{MP} = -\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$ .

$$= -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Mặt khác  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q}$

$$= \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DC'}$$

$$= \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

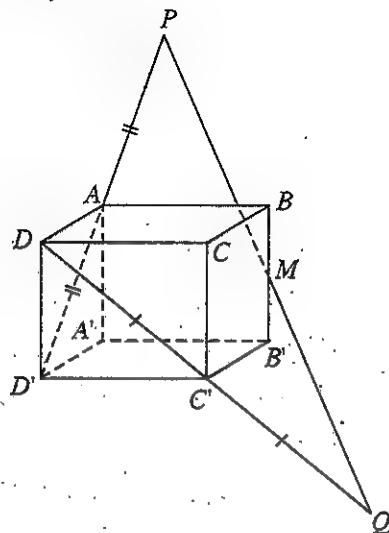
Như vậy  $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ}$ , tức là ba điểm  $P, M, Q$  thẳng hàng hay đường thẳng  $PQ$  đi qua trung điểm của cạnh  $BB'$ .

• Ta có  $PQ^2 = \overrightarrow{PQ}^2 = 4\overrightarrow{MP}^2$ .

$$= 4\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

$$= 4\left(\frac{9}{4}m^2 + m^2 + m^2 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^2 + m^2\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{33}{4}m^2 = 33m^2 \Rightarrow PQ = m\sqrt{33}.$$



Hình 137



6. (h.138)

Cách 1. Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  
 $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ .

Từ giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{b}$$

$$\text{mà } \overrightarrow{BD'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Lập luận tương tự như trên,

$$\text{ta có } \overrightarrow{BD_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{và } \overrightarrow{BD_3} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}.$$

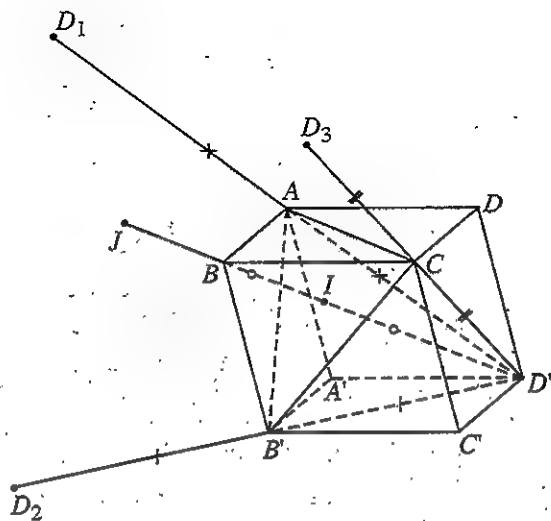
Điều này chứng tỏ  $B$  là trọng tâm của tứ diện  $D_1D_2D_3D'$ .

Cách 2.

Gọi  $I$  là giao điểm của  $BD'$  và  $mp(AB'C)$  thì  $D'I = 2IB$ .

Gọi  $J$  là giao điểm của  $BD'$  với  $mp(D_1D_2D_3)$ , do  $D_1, D_2, D_3$  là các điểm đối xứng của  $D'$  lần lượt qua  $A, B, C$  nên  $IJ = ID'$  hay  $D'B = \frac{3}{4}D'J$ .

Mặt khác  $I$  là trọng tâm tam giác  $AB'C$  nên  $J$  là trọng tâm tam giác  $D_1D_2D_3$ . Từ đó  $B$  là trọng tâm của tứ diện  $D_1D_2D_3D'$ .



Hình 138

7. (h.139)

a) Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Khi đó, ta có

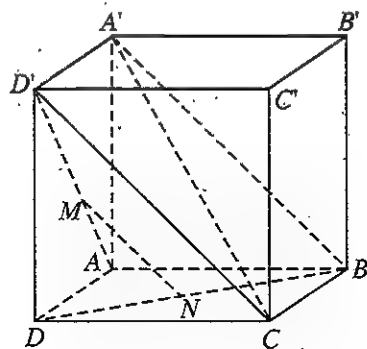
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\text{và } \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2.$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'}).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c}).$$



Hình 139

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = -\frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1}{1-k}\vec{c}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{1+k}{1-k}\vec{c} + \frac{k}{1-k}(\vec{a} - \vec{b})\end{aligned}$$

hay

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA'}.$$

Như vậy ba vectơ  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BA'}$  đồng phẳng.

Mặt khác  $AD'$ ,  $DB$  cắt mp( $A'BCD'$ ); các điểm  $M$ ,  $N$  lần lượt thuộc  $AD'$ ,  $DB$  với  $k \neq 0$ ,  $k \neq 1$  nên  $MN$  không thuộc mp( $A'BC$ ). Vậy  $MN$  song song với mp( $A'BC$ ).

b) Ta có  $\overrightarrow{A'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ;  $A'C$ ,  $AD'$  chéo nhau;  $A'C$ ,  $BD$  chéo nhau mà  $M \in AD'$ ,  $N \in DB$ . Do đó, đường thẳng  $MN$  song song với đường thẳng  $A'C$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{A'C}$ , tức là

$$\frac{k}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1+k}{1-k}\vec{c} = -m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c}.$$

Do  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  là ba vectơ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{k}{1-k} = -m \\ -\frac{k}{1-k} = m \\ \frac{1+k}{1-k} = m. \end{cases}$$

Suy ra

$$-k = 1 + k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Vậy khi  $k = -\frac{1}{2}$  thì  $MN$  song song với  $A'C$ .

Khi đó  $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ .

Mặt khác  $\overrightarrow{AD'} = \vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{c}.$

Vậy  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD'} = -\frac{1}{3}(\vec{a}^2 - \vec{c}^2) = 0$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{1}{3}(-\vec{b}^2 + \vec{c}^2) = 0.$$

Điều này khẳng định  $MN$  vuông góc với  $AD'$  và  $DB$ .

8. (h.140)

Đặt  $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}.$

Khi đó, ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}m^2$$

và  $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2.$

a) Vì  $M, N$  là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

hay  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}).$

Vậy  $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c})$

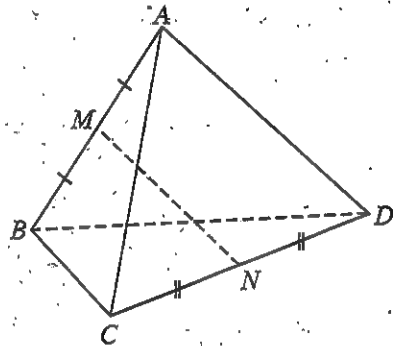
$$= \frac{1}{4}(m^2 + m^2 + m^2 + m^2 - m^2 - m^2) = \frac{2m^2}{4}.$$

Tức là  $MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b}^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} - m^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $AB$  bằng  $90^\circ$ .



Hình 140

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - m^2 + \frac{m^2}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} + m^2 + \frac{m^2}{2} + m^2 - \frac{m^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}m^2.\end{aligned}$$

Tức là  $|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}m^2.$

Từ đó  $\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\frac{m^2}{2}}{m \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BC$  bằng  $45^\circ$ .

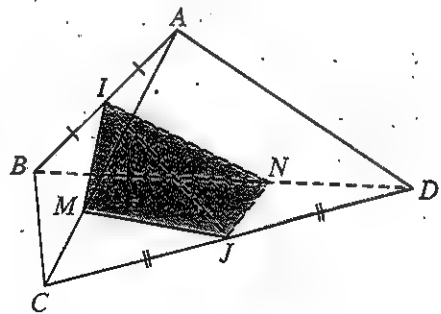
9. (h.141)

Vì  $\overrightarrow{MA} = k_1 \overrightarrow{MC}$

nên  $\overrightarrow{IM} = \frac{\overrightarrow{IA} - k_1 \overrightarrow{IC}}{1 - k_1}.$

Tương tự, ta có

$$\overrightarrow{IN} = \frac{\overrightarrow{IB} - k_2 \overrightarrow{ID}}{1 - k_2} = \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2 \overrightarrow{ID}}{1 - k_2}.$$



Hình 141

Mặt khác 
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}).$$

Để các điểm  $I, J, M, N$  thuộc một mặt phẳng, điều kiện cần và đủ là ba vectơ  $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}$  đồng phẳng. Rõ ràng là  $\overrightarrow{IN}$  và  $\overrightarrow{IJ}$  không cùng phương nên điều kiện định  $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}$  đồng phẳng tương đương với

$$\overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IN} + q\overrightarrow{IJ}$$

hay 
$$\frac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1 - k_1} = p \cdot \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2} + \frac{q}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{1 - k_1} + \frac{p}{1 - k_2} \right) \overrightarrow{IA} - \left( \frac{k_1}{1 - k_1} + \frac{q}{2} \right) \overrightarrow{IC} + \left( \frac{pk_2}{1 - k_2} - \frac{q}{2} \right) \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Do  $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}$  không đồng phẳng nên đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{1 - k_1} + \frac{p}{1 - k_2} = 0 \\ \frac{k_1}{1 - k_1} + \frac{q}{2} = 0 \\ \frac{pk_2}{1 - k_2} - \frac{q}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{1 - k_1} = -\frac{pk_2}{1 - k_2} = \frac{k_2}{1 - k_1}$$

hay  $k_1 = k_2.$

10. Lấy  $E_1, E_2, E_3$  lần lượt thuộc các tia  $Ox, Oy, Oz$  sao cho  $OE_1 = OE_2 = OE_3.$

Đặt  $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3.$

a) Do ba tia  $Ox, Oy, Oz$  không đồng phẳng nên

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 > 0,$$

tức là  $\vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2 + 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) > 0$

$$\Leftrightarrow 3OE_1^2 + 2OE_1^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) > 0.$$

Vậy 
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

b) Dễ thấy  $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} \parallel Ox_1$

$$\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3} \parallel Oy_1$$

$$\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1} \parallel Oz_1.$$

$$Ox_1 \perp Oy_1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}) = 0$$

hay  $\overrightarrow{OE_2}^2 + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_2} \cdot \overrightarrow{OE_3} = 0.$

Ta có

$$(\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}) = \overrightarrow{OE_1}^2 + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_2} \cdot \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_3} = 0.$$

Vậy  $Ox_1 \perp Oz_1$ .

Tương tự, ta cũng có  $Oy_1 \perp Oz_1$ .

11. a)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

b)  $m^2 + n^2 + p^2 > 0.$

12. Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CC_1}.$$

Do  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  song song với nhau, hai đường thẳng  $\Delta, \Delta_1$  cắt chúng lần lượt tại  $A, B, C$  và  $A_1, B_1, C_1$  nên theo định lý Ta-lét, ta có

$$\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}.$$

Từ  $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$  nên với điểm  $O$ , ta có

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}}{1 - k}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}}{1 - k}.$$

Từ đó  $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{AA_1}}{1 - k} - \frac{k}{1 - k} \overrightarrow{CC_1}$

hay  $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1 - k} \overrightarrow{OI} - \frac{k}{1 - k} \overrightarrow{OK}.$

Lấy  $O$  trùng với  $I$ , ta có  $\overrightarrow{IJ} = -\frac{k}{1 - k} \overrightarrow{IK}.$

Như vậy ba điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.

13. (h.142)

Trước hết, ta chứng minh

$$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2.$$

Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ . Ta có

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$$

$$= -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) + \left(\frac{\vec{c}}{2}\right) = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 4\overrightarrow{IJ}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2$$

$$= 2\vec{b}^2 + 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}.$$

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2 + \vec{b}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + \vec{a}^2$$

$$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Vậy, ta có

$$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$$

Tương tự, ta có

$$AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 4HK^2$$

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

Từ đó

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

14. (h.143)

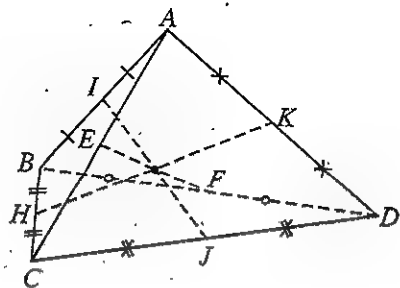
Cách 1

Từ  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , ta có  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ,

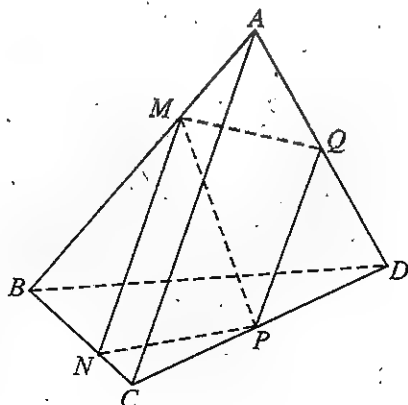
mặt khác  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

nên  $MN \parallel AC$ .

Nếu có  $k$  để các điểm  $M, N, P, Q$  thuộc một mặt phẳng thì mp(MNQ) cắt mp(ACD) theo giao tuyến PQ nên  $PQ \parallel AC$ .



Hình 142



Hình 143

Mặt khác  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

nên  $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ .

Vậy  $k = \frac{1}{2}$  thì các điểm  $M, N, P, Q$  cùng thuộc một mặt phẳng.

Cách 2

Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ .

Khi đó  $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ .

Do  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = -\vec{a} + k\overrightarrow{DC} = -\vec{a} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\vec{a}.$$

Khi đó

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Các điểm  $M, N, P, Q$  thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi có số  $x, y$  sao cho

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} = -\frac{2}{3}x\vec{a} + \frac{2}{3}x\vec{c} - \frac{1}{6}y\vec{a} - \frac{1}{3}y\vec{b}.$$



Do  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng nên điều đó tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 1, x = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{2}$$

Vậy khi  $k = \frac{1}{2}$  thì các điểm  $M, N, P, Q$  cùng thuộc một mặt phẳng.

15. (h.144)

Đặt  $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ . Vì  $M$  thuộc đường thẳng  $AA'$  nên

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c};$$

$N$  là điểm thuộc đường thẳng  $BC$  nên

$$\overrightarrow{BN} = l\vec{a};$$

$P$  là điểm thuộc đường thẳng  $C'D'$  nên

$$\overrightarrow{C'P} = m\vec{b}.$$

Với  $k, l, m$  là những số thực.

Ta có

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P}$$

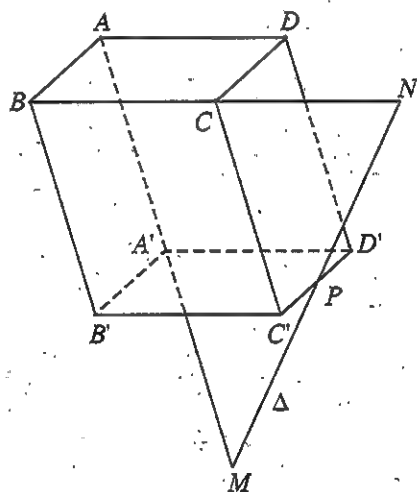
$$= -l\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + m\vec{b}$$

$$= (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}.$$

Do  $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$  nên ta có

$$\begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2.$$

Vậy  $\frac{MA}{MA'} = 2.$



Hình 144

**§2, §3, §4. Hai đường thẳng vuông góc.  
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.  
Hai mặt phẳng vuông góc**

16. (h.145)

a) Vì  $BC \parallel AD$  nên góc giữa  $SD$  và  $BC$  bằng góc giữa  $SD$  và  $AD$ .

Từ giả thiết, ta có  $SA \perp BC$

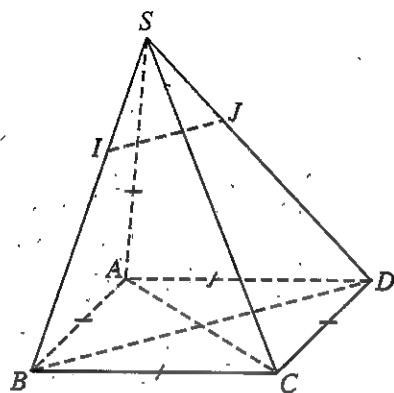
nên  $SA \perp AD$

mặt khác  $SA$  bằng cạnh của hình thoi  $ABCD$ , nên  $\widehat{SDA} = 45^\circ$  là góc phải tìm.

Vậy góc giữa  $BC$  và  $SD$  bằng  $45^\circ$ .

b) Do  $ABCD$  là hình thoi nên  $AC \perp BD$ .

Mặt khác  $IJ \parallel BD$  nên  $AC \perp IJ$  tức là góc giữa  $IJ$  và  $AC$  bằng  $90^\circ$  không đổi.



Hình 145

17. (h.146)

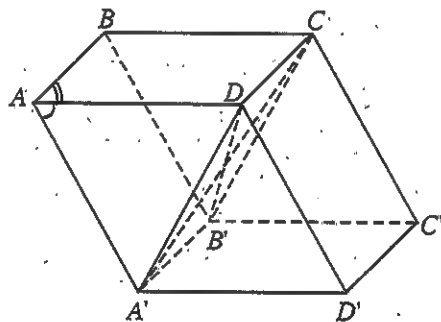
Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{z}$  thì

$$\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = a^2$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{a^2}{2};$$

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2};$$

$$\vec{y} \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2}.$$



Hình 146

a) • Vì  $AB \parallel A'B'$  nên góc giữa  $AB$  và  $A'D$  bằng góc giữa  $A'B'$  và  $A'D$ , đó là góc  $\widehat{DA'B'}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{DA'B'}$ .

Đặt  $\widehat{DA'B'} = \alpha$ .

Ta có  $A'D = a\sqrt{3}$ ,  $A'B' = a$ .

$$\overrightarrow{DB'} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = 3a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 2a^2.$$

$$\text{Vậy } 2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a \cdot a\sqrt{3} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Như thế góc giữa  $A'D$  và  $AB$  bằng  $\alpha$  mà  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

$$\bullet \overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = 3a^2 + a^2 - a^2 - a^2 = 2a^2.$$

Để thấy  $AB' = a$ .

Ta có  $ADC'B'$  là hình bình hành mà  $AD = AB'$ ,  $AC' = B'D$  nên tứ giác  $ADC'B'$  là hình vuông. Vậy  $AC' \perp B'D$ , tức là góc giữa  $AC'$  và  $B'D$  bằng  $90^\circ$ .

$$\text{b) } S_{A'B'CD} = A'D \cdot A'B' \sin \widehat{DA'B'} = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{A'B'CD} = a^2\sqrt{2}.$$

$$\text{Đặt } \widehat{ACC'} = \beta \text{ thì } AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC \cdot CC' \cdot \cos \beta$$

$$\text{hay } 2a^2 = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3} \cdot a \cdot \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{ACC'A'} = AC \cdot CC' \cdot \sin \beta = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}.$$

$$\text{c) Do } \overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}.$$

Suy ra :

$$\bullet \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{x}$$

$$= a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$$

$$\text{hay } |\overrightarrow{AC'}| |\overrightarrow{AB}| \cos \gamma = a^2$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa  $AC'$  và  $AB$  bằng  $45^\circ$ .

Vậy hai góc trên bằng nhau và bằng  $45^\circ$  khi và chỉ khi

$$MP = NP \text{ và } \widehat{MPN} = 90^\circ.$$

Từ đó, suy ra  $\frac{CP}{CA} \cdot AB = \frac{AP}{AC} \cdot CD$  và  $AB \perp CD$ ,

hay  $\frac{AB}{CD} = \frac{AP}{CP}$  và  $AB \perp CD$ .

Mặt khác, ta có  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = |k|$ .

Vậy giữa  $AB$  và  $CD$  có mối liên hệ

$$\frac{AB}{CD} = |k| \text{ và } AB \perp CD.$$

thì góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BA}$  bằng góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CD}$ , cùng bằng  $45^\circ$ .

## 21. (h.150)

Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $IJ$  và  $IK$ , đó là góc  $\widehat{JIK}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{JIK}$ .

a) Vì tứ giác  $IJHK$  là hình thoi mà  $IH = \sqrt{3}IJ$ , nên từ  $JK^2 + IH^2 = 4IJ^2$

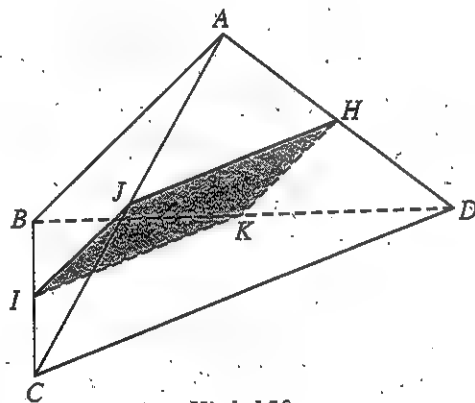
ta có  $JK^2 = IJ^2$

hay  $JK = IJ$ .

Như vậy  $JIK$  là tam giác đều, do đó  $\widehat{JIK} = 60^\circ$ .

Vậy góc giữa  $AB$  và  $CD$  trong trường hợp này bằng  $60^\circ$ .

b) Khi tứ giác  $IJHK$  là hình chữ nhật thì  $\widehat{JIK} = 90^\circ$ . Do đó, góc giữa  $AB$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .



Hình 150

22. (h.151)

a) Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$  thì  $AI \perp BC, DI \perp BC$ .

Ta có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ .

$$\begin{aligned} \text{Xét } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}) \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ID} = 0. \end{aligned}$$

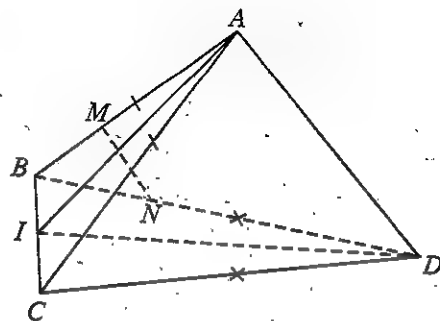
Vậy  $BC \perp AD$ .

b) Từ giả thiết  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$$

ta có  $MN \parallel AD$ .

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BC$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$ . Theo câu a) thì  $AD$  vuông góc  $BC$ , nên góc giữa  $MN$  và  $BC$  bằng  $90^\circ$ .



Hình 151.

23. (h.152)

$$\text{Ta có } IJ = \frac{1}{2}AB$$

$$IK = \frac{1}{2}CD = \frac{2}{3}AB$$

$$\begin{aligned} IJ^2 + IK^2 &= \frac{1}{4}AB^2 + \frac{4}{9}AB^2 \\ &= \frac{25}{36}AB^2 \end{aligned}$$

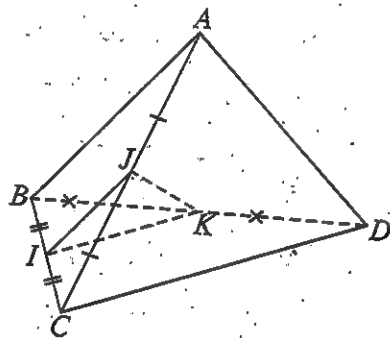
$$\text{mà } JK^2 = \frac{25}{36}AB^2 \text{ nên } IJ^2 + IK^2 = JK^2.$$

Vậy  $JI \perp IK$ .

Do  $IJ \parallel AB, IK \parallel CD$  nên góc giữa  $AB$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .

Mặt khác  $IJ \parallel AB$  mà  $AB \perp CD$  nên  $IJ \perp CD$ .

Vậy góc giữa  $IJ$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .



Hình 152

24. (h.153)

Áp dụng ví dụ 2 (§1 chương III, SGK Hình học 11 nâng cao), ta có

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a^2} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$

Vậy nếu góc giữa  $BC$  và  $AD$  bằng  $\alpha$  thì

$$\cos \alpha = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2}.$$

hay  $a^2 \cos \alpha = |c^2 - b^2|.$

Tương tự như trên, nếu gọi  $\beta$  là góc giữa  $AC$  và  $BD$  thì

$$b^2 \cos \beta = |a^2 - c^2|$$

và  $\gamma$  là góc giữa  $AB$  và  $CD$  thì

$$c^2 \cos \gamma = |b^2 - a^2|.$$

Với  $a, b, c$  lần lượt là độ dài của  $BC, CA, AB$ , không giảm tính tổng quát có thể coi  $a \geq b \geq c$ . Khi đó

$$a^2 \cos \alpha = b^2 - c^2$$

$$b^2 \cos \beta = a^2 - c^2$$

$$c^2 \cos \gamma = a^2 - b^2.$$

Từ đó, trong trường hợp này ta có  $b^2 \cos \beta = a^2 \cos \alpha + c^2 \cos \gamma.$

25. (h.154)

a) Từ  $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$

$$\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$$

ta có  $IJ \parallel AB$ .

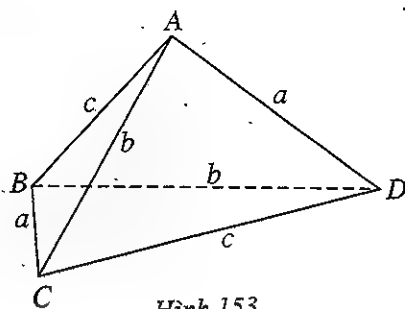
Tương tự, ta có  $JK \parallel CD$ .

Do các cạnh của tứ diện  $ABCD$  bằng nhau và  $N$  là trung điểm của  $CD$  nên  $NA = NB$ .

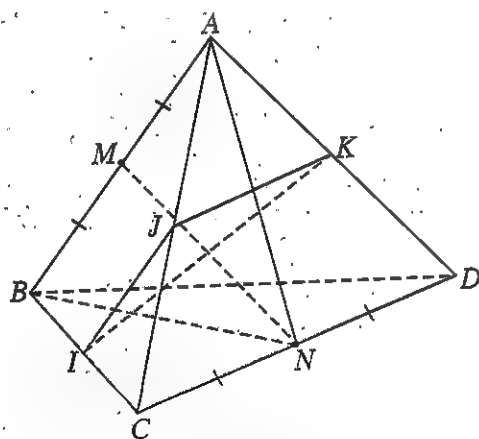
Mặt khác  $MA = MB$ ,

do đó  $MN \perp AB$ , suy ra  $MN \perp IJ$ .

Tương tự như trên, ta có  $MN \perp CD$  và  $JK \parallel CD$  nên  $MN \perp JK$ .



Hình 153



Hình 154

b) Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}$ .

Từ giả thiết, ta có

$$AN \perp CD \text{ tức là } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 ;$$

$$BN \perp CD \text{ tức là } \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}) \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \text{ tức là } AB \perp CD.$$

26. (h.155)

a) Vì  $ABCD$  là hình bình hành và  $O = AC \cap BD$  nên  $OA = OC$  và  $OB = OD$ . Mặt khác  $SA = SC$  nên  $SO \perp AC$  và  $SB = SD$  nên  $SO \perp BD$ .

Vậy  $SO \perp mp(ABCD)$ .

b) Vì  $AB \parallel CD$

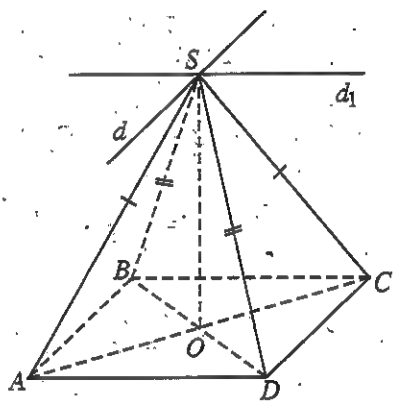
mà  $d = mp(SAB) \cap mp(SCD)$

nên  $d \parallel AB$  và  $d$  qua  $S$ .

Tương tự  $d_1 \parallel AD$  và  $d_1$  qua  $S$ .

Do  $SO \perp mp(ABCD)$  nên  $SO \perp d, SO \perp d_1$ .

Vậy  $SO \perp mp(d, d_1)$ .



Hình 155

27. (h.156)

a) Ta có  $\left. \begin{array}{l} AB \perp (BCE) \\ CH \perp BE \end{array} \right\} \Rightarrow CH \perp AH$ .

Vậy  $ACH$  là tam giác vuông tại  $H$ .

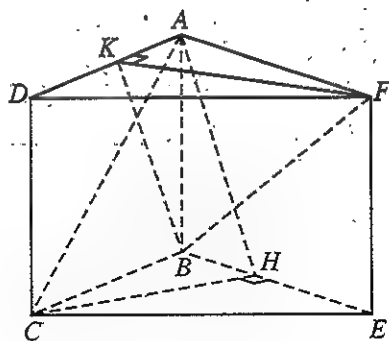
Tương tự, ta có  $BKF$  là tam giác vuông tại  $K$ .

b) Ta có  $\left. \begin{array}{l} CH \perp BE \\ CH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow CH \perp BF$ .

Mặt khác  $AC \perp BF$ .

Vậy  $BF \perp AH$ .

Tương tự, ta có  $AC \perp BK$ .



Hình 156

28. (h.157)

a) Kí hiệu cạnh của tứ diện đã cho là  $a$ , dễ thấy  $H$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Từ đó

$$\begin{aligned} DH^2 &= DA^2 - AH^2 \\ &= a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Do  $I$  là trung điểm của  $DH$  nên

$$IH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Khi đó } IM^2 = IH^2 + HM^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$\text{tức là } IM = \frac{a}{2}.$$

Xét tam giác  $IBC$  có  $IM$  là trung tuyến và  $IM = \frac{1}{2}BC$ . Vậy  $IB \perp IC$ .

Tương tự như trên, ta có  $IA, IB, IC$  đôi một vuông góc.

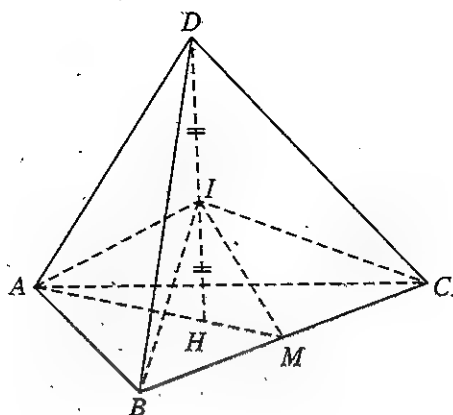
b) Vì  $IA, IB, IC$  đôi một vuông góc,  $IA = IB = IC$  và  $H$  là hình chiếu của  $I$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  nên  $ABC$  là tam giác đều nhận  $H$  làm trọng tâm.

$$\text{Ngoài ra } \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{IC^2} = \frac{3}{IA^2} \text{ hay } IH = \frac{IA}{\sqrt{3}}.$$

Do  $D$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $I$  nên

$$DH = \frac{2IA}{\sqrt{3}} \text{ và } DA = DB = DC.$$

$$\text{Đặt } IA = x \text{ thì } DH = \frac{2x}{\sqrt{3}}, AB = x\sqrt{2}.$$



Hình 157



$$\begin{aligned}\text{Khi đó } DA^2 &= DH^2 + HA^2 = \frac{4x^2}{3} + \left( \frac{x\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \right)^2 \\ &= \frac{4x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} = 2x^2.\end{aligned}$$

Vậy  $DA = DB = DC = x\sqrt{2}$ .

Do đó tứ diện  $DBCA$  có các cạnh bằng nhau.

29. (h.158)

a)  $SB \perp (ABC)$  và

$BA \perp AC$  nên  $SA \perp AC$  tức là  $SAC$  là tam giác vuông tại  $A$ .

b) Ta có  $AC = a \cos \alpha$ .

$$SA = AC \tan \beta = a \cos \alpha \tan \beta$$

$$SC = \frac{AC}{\cos \beta} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\begin{aligned}SB^2 &= SC^2 - BC^2 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - a^2 \\ &= \frac{a^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)}{\cos^2 \beta}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } SB = \frac{a}{\cos \beta} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

(Điều kiện để bài toán có nghĩa là  $\alpha, \beta$  phải thoả mãn  $\cos^2 \alpha > \cos^2 \beta$ ).

30. (h.159)

a) Ta có  $SB = SD = a\sqrt{2}$ ,  $AC = a$

(vì  $ABC$  là tam giác cân mà  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ ).

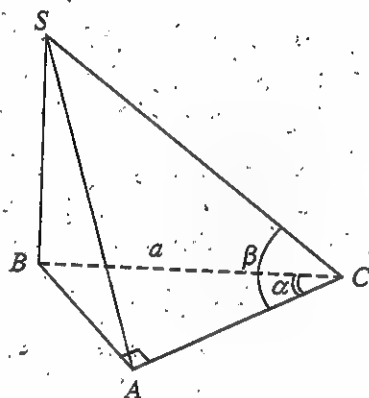
Vậy  $SC = a\sqrt{2}$ .

b) Gọi  $O = AC \cap BD$  thì

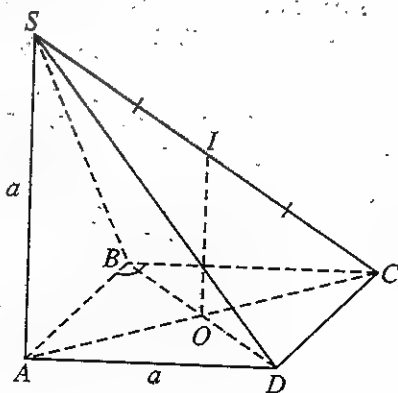
$IO \parallel SA$  nên  $IO \perp (ABCD)$ , từ đó

$IO \perp BD$ .

Mặt khác  $OB = OD$  nên  $BID$  là tam giác cân tại  $I$ , tức là  $IB = ID$ .



Hình 158



Hình 159

31. Giả sử  $ABCD$  là tứ diện có tính chất  $AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp BC$ .

Từ bài tập 20 chương III SGK Hình học 11 nâng cao, ta có

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Từ đó, ta có

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = AC^2 + AD^2 - CD^2 = AD^2 + AB^2 - BD^2.$$

Hệ thức này khẳng định các góc  $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$  hoặc cùng nhọn, cùng vuông hoặc cùng tù.

Tương tự như trên, ta chứng minh được ba góc tại bất cứ đỉnh nào của tứ diện  $ABCD$  cũng có tính chất đó. Do tính chất tổng các góc trong của một tam giác bằng  $180^\circ$  nên tồn tại nhiều nhất một đỉnh của tứ diện mà tại đó ba góc cùng vuông hay cùng tù. Khi ấy mặt đối diện với đỉnh đó của tứ diện  $ABCD$  có cả ba góc đều nhọn.

Vậy nếu  $AB \perp CD, AC \perp BD$  và  $AD \perp BC$  thì trong bốn mặt của tứ diện  $ABCD$  có ít nhất một mặt là tam giác nhọn (cả ba góc của nó nhỏ hơn  $90^\circ$ ).

32. (h.160)

a) Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $AM \perp BC$ , mặt khác  $DA \perp (ABC)$  nên  $BC$  vuông góc với mp( $DAM$ ), từ đó  $BC \perp AH$ .

Mà  $DM \perp AH$ .

Vậy  $AH \perp \text{mp}(DBC)$ .

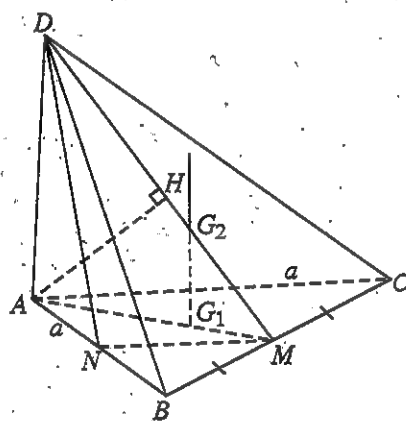
b) Kẻ  $MN$  song song với  $AC$  ( $N \in AB$ ) thì góc giữa  $DM$  và  $AC$  bằng góc giữa  $DM$  và  $MN$ , đó là  $\widehat{DMN}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{DMN}$ .

Ta có  $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, AN = \frac{a}{2}$ .

$$DN^2 = DA^2 + AN^2 = \frac{16}{25}a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{89}{100}a^2$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \frac{9a^2}{25} = \frac{16a^2}{25}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{4a}{5}.$$



Hình 160

Mặt khác  $AD = \frac{4a}{5}$  do đó  $DM = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$ .

$$DN^2 = DM^2 + MN^2 - 2DM \cdot MN \cos \widehat{DMN}$$

$$\frac{89}{100}a^2 = \frac{2.16a^2}{25} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{4a\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{a}{2} \cos \widehat{DMN}$$

$$= \frac{153a^2}{100} - \frac{4a^2\sqrt{2}}{5} \cos \widehat{DMN}$$

$$\Rightarrow \frac{4a^2\sqrt{2}}{5} \cos \widehat{DMN} = \frac{64a^2}{100}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{DMN} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Vậy góc giữa  $AC$  và  $DM$  là  $\alpha$  mà  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ .

c) Để thấy  $G_1G_2 \parallel DA$  mà  $DA \perp (ABC)$

nên  $G_1G_2 \perp (ABC)$ .

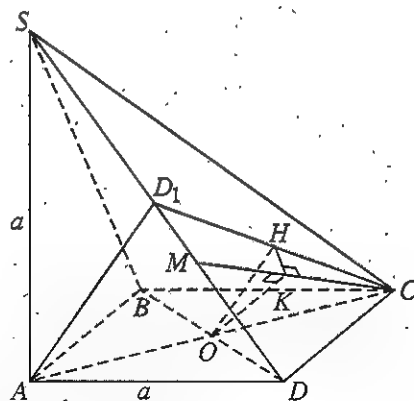
### 33. (h.161)

a) Vì  $SA = AD = a$  và  $D_1$  là trung điểm của  $SD$  nên  $AD_1 \perp SD$ . Mặt khác, ta có  $CD \perp (SAD)$  nên  $AD_1 \perp CD$ . Vậy  $AD_1 \perp (SCD)$ .

b) Kẻ  $OH \parallel AD_1$  thì  $H$  là trung điểm của  $D_1C$  và  $OH \perp (SCD)$ , ngoài ra  $H$  cố định.

Gọi  $K$  là hình chiếu của  $O$  trên  $CM$  thì  $HK \perp KC$  (định lý ba đường vuông góc). Từ đó, suy ra điểm  $K$  thuộc

đường tròn đường kính  $HC$  trong mp( $SCD$ ). Đó là đường tròn cố định chứa hình chiếu của tâm hình vuông trên mặt phẳng ( $SCD$ )



Hình 161



Vậy  $S_{AKI}$  đạt giá trị lớn nhất khi  $\alpha$  thoả mãn điều kiện

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} + \frac{2}{4R^2} &= \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4R^2 \sin^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} + \frac{2}{4R^2} &= \frac{1}{4R^2 \sin^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{4R^2 + 2h^2}{h^2} &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \frac{h}{\sqrt{4R^2 + 2h^2}} \end{aligned}$$

Như vậy, có hai vị trí của đường thẳng  $\Delta$  để  $S_{AKI}$  đạt giá trị lớn nhất.

c) Ta có  $SH$  lớn nhất khi và chỉ khi  $AH$  lớn nhất, điều này xảy ra khi  $AH$  trùng với  $AB$ . Vậy nếu  $\Delta$  trong  $(P)$  vuông góc với  $AB$  tại  $B$  thì  $SH$  đạt giá trị lớn nhất.

$SH$  đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi  $AH$  đạt giá trị bé nhất, điều này xảy ra khi  $H$  trùng với điểm  $A$ , tức là  $\Delta$  trùng với đường thẳng  $AB$ .

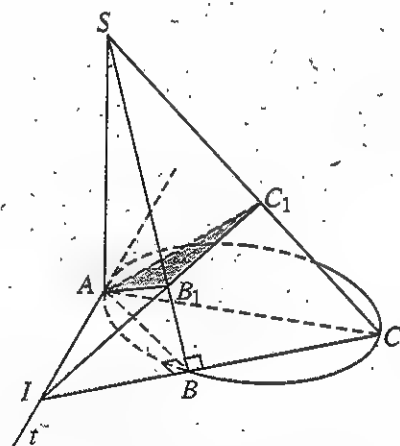
### 35. (h.163)

a) Để chứng minh được  $SC \perp (AB_1C_1)$ . Gọi  $At$  là giao tuyến của  $(ABC)$  và  $(AB_1C_1)$  thì  $At \perp SC$ . Mặt khác  $SA \perp (ABC)$  nên  $At \perp AC$ . Vậy đường thẳng  $At$  cố định, đồng thời đường thẳng  $At$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

b) Kí hiệu  $I$  là giao điểm của  $At$  và đường thẳng  $BC$  thì  $I$  là điểm cố định, mặt khác các điểm  $I, B_1, C_1$  thuộc cả hai mặt phẳng  $(AB_1C_1)$  và  $(SBC)$ , do đó các điểm  $I, B_1, C_1$  thẳng hàng, tức là đường

thẳng  $B_1C_1$  đi qua điểm cố định  $I$  khi  $S$  thay đổi trên đường thẳng kẻ từ  $A$  vuông góc với mp $(ABC)$ .

Cũng từ chứng minh trên ta có  $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$  (cùng chắn  $\widehat{AB}$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ ).



Hình 163

36. (h.164)

a) Ta có  $SA^2 = SB.SB_1 = SC.SC_1$ .  
 Vậy bốn điểm  $B, C, B_1, C_1$  thuộc một đường tròn. Nếu  $B_1C_1$  và  $BC$  là hai đường thẳng song song thì suy ra  $BB_1C_1C$  là hình thang cân, từ đó  $SBC$  là tam giác cân tại  $S$ , điều đó dẫn đến  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$ , mâu thuẫn với giả thiết, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $B_1C_1$  và  $BC$  thì  $AI$  là giao tuyến của  $(ABC)$  và  $(AB_1C_1)$ . Gọi  $AA'$  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  thì ta chứng minh được  $(AB_1C_1) \perp SA'$ , từ đó  $AI \perp AA'$ . Như vậy, giao tuyến  $AI$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Nếu điểm  $B$  nằm giữa  $I$  và  $C$  (h.165) thì ta có  $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$  (cùng chắn  $\widehat{AB}$ ).

Nếu điểm  $C$  nằm giữa  $I$  và  $B$  (h. 166) thì ta có

$\widehat{BAI} = \widehat{ACB}$  (cùng chắn  $\widehat{AB}$ );

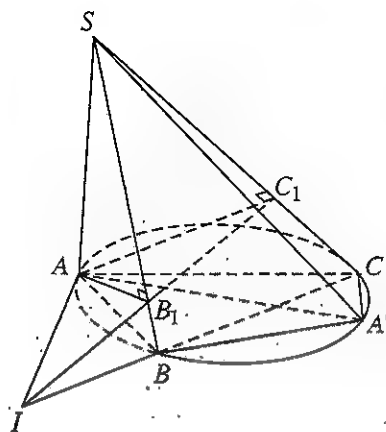
mặt khác  $\widehat{IAB} + \widehat{BAI} = 180^\circ$

và  $\widehat{ICA} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ .

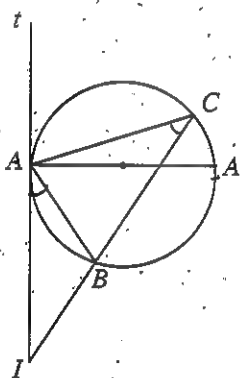
Như vậy  $\widehat{ICA} = \widehat{IAB}$ .

37. (h.167)

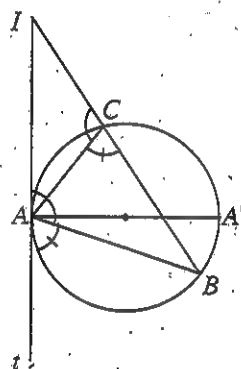
Vì  $(\alpha) \perp SC$  và  $A \in (\alpha)$  nên  $AC_1 \perp SC$ . Mặt khác, gọi  $B_1D_1 = (\alpha) \cap (SBD)$  thì  $B_1D_1$



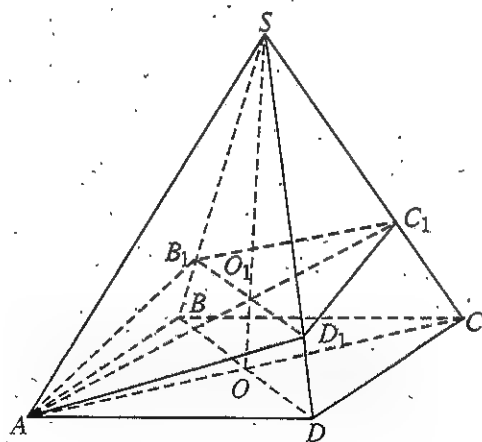
Hình 164



Hình 165



Hình 166



Hình 167

song song với  $BD$  và  $B_1D_1$  qua  $O_1$  với  $O_1 = AC_1 \cap SO$  (do  $BD \perp SC$ ,  $(\alpha) \perp SC$  nên  $BD \parallel (\alpha)$ ).

Vì  $SAC$  là tam giác cân tại  $S$  và  $AC_1 \perp SC$  nên  $C_1$  thuộc  $SC$  khi và chỉ khi  $\widehat{ASC} < 90^\circ$  tức là  $\widehat{OSC} < 45^\circ$ . Xét tam giác vuông  $SOC$ , điều kiện  $\widehat{OSC} < 45^\circ$  tương đương với  $SO > OC = \frac{AC}{2} = 2a$ . Vậy để  $C_1$  thuộc  $SC$ ,  $C_1$  không trùng với  $C$  và  $S$  thì hệ thức liên hệ giữa  $h$  và  $a$  là  $h > 2a$ .

Để thấy thiết diện của  $SABCD$  khi cắt bởi  $(\alpha)$  là tứ giác  $AB_1C_1D_1$  có tính chất  $AC_1 \perp B_1D_1$ . Do đó  $S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot B_1D_1$ .

Ta có  $AC_1 \cdot SC = SO \cdot AC \Rightarrow AC_1 = \frac{4ah}{\sqrt{4a^2 + h^2}}$ ;

mặt khác  $\frac{O_1O}{CO} = \frac{AO}{SO} \Rightarrow O_1O = \frac{4a^2}{h} \Rightarrow SO_1 = \frac{h^2 - 4a^2}{h}$ .

Từ đó  $\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{h^2 - 4a^2}{h^2}$

hay  $B_1D_1 = \frac{2a(h^2 - 4a^2)}{h^2}$

Vậy  $S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4ah}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \cdot \frac{2a(h^2 - 4a^2)}{h^2}$   
 $= \frac{4a^2(h^2 - 4a^2)}{h\sqrt{4a^2 + h^2}}$

38. (h.168)

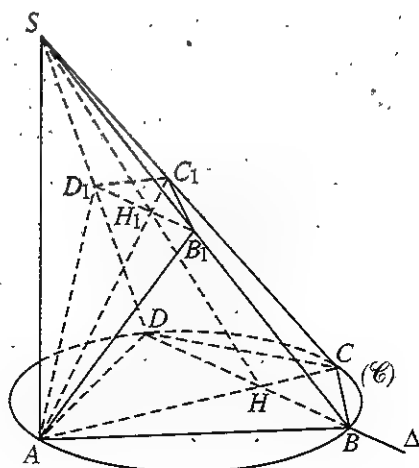
a) Vì  $(Q)$  qua  $A$  và  $(Q) \perp SC$  nên  $AB_1 \perp SC$ .

Mặt khác dễ thấy  $BC \perp (SAB)$  nên  $BC \perp AB_1$ .

Vậy  $AB_1 \perp mp(SBC)$ , tức là  $AB_1 \perp B_1C_1$ .

Tương tự như trên, ta có  $AD_1 \perp D_1C_1$ .

Do đó, tứ giác  $AB_1C_1D_1$  nội tiếp đường tròn.



Hình 168

b). Do tứ giác  $AB_1C_1D_1$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AC_1$  mà  $AC_1$  cắt  $B_1D_1$  tại  $H_1$  nên  $H_1$  là trung điểm của  $B_1D_1$ , khi đó xảy ra một trong hai trường hợp sau :

– Trường hợp 1.  $B_1D_1 \perp AC_1$  tại  $H_1$  (h.169a).

– Trường hợp 2.  $B_1D_1$  qua trung điểm  $H_1$  của  $AC_1$  (h.169b).

Xét trường hợp 1

Vì  $B_1D_1 \perp AC_1$  nên  $AB_1 = AD_1$ .

Mặt khác  $AB_1, AD_1$  là hai đường cao của hai tam giác vuông  $SAB$  và  $SAD$  nên

$$AB_1 = AD_1 \Leftrightarrow AB = AD$$

(vì  $\frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AB_1^2}$  và  $\frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AD_1^2}$ ).

Lại có  $AC$  là đường kính của  $(C)$  nên

$$AB = AD \Leftrightarrow BD \perp AC.$$

Vậy nếu đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với  $AC$  tại  $H$  mà  $0 < AH < AC$  thì  $H_1$  là trung điểm của  $B_1D_1$ .

Xét trường hợp 2 (h.169c)

Kẻ  $C_1K \parallel H_1H$ , do  $H_1$  là trung điểm của  $AC_1$  nên

$AH = HK = x$ , từ đó  $CK = 2R - 2x$ . Khi đó

$$\frac{2R - 2x}{2R - x} = \frac{CK}{CH} = \frac{CC_1}{CS} = \frac{CC_1 \cdot CS}{CS^2} = \frac{AC^2}{CS^2} = \frac{4R^2}{h^2 + 4R^2}$$

$$\Leftrightarrow (R - x)(h^2 + 4R^2) = 2R^2(2R - x)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{Rh^2}{h^2 + 2R^2}$$

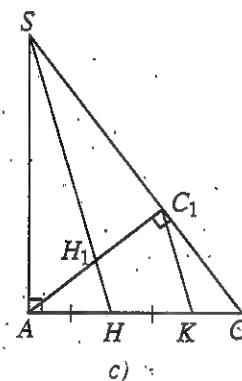
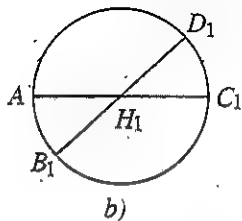
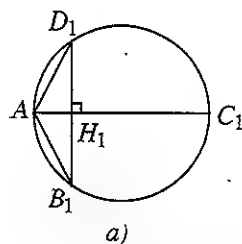
Dễ thấy  $0 < x < 2R$ .

Vậy nếu đường thẳng  $\Delta$  quay quanh điểm  $H$  mà  $H$  được xác định bởi

$$AH = x = \frac{Rh^2}{h^2 + 2R^2}, H \in AC$$

thì  $H_1$  là trung điểm của  $B_1D_1$ .

c) Bạn đọc tự giải.



Hình 169



39. (h.170)

a) Dễ dàng thấy  $SAB, SAD$  là các tam giác vuông tại  $A$ .

Mặt khác  $SA \perp (ABCD), AD \perp DC$

nên  $SD \perp DC$  (định lý ba đường vuông góc);  
do đó  $SDC$  là tam giác vuông tại  $D$ .

Tương tự,  $SBC$  là tam giác vuông tại  $B$ .

b) Dễ dàng chứng minh được

$$AD_1 \perp (SCD)$$

$$\Rightarrow AD_1 \perp SC.$$

Cũng như vậy, ta có  $AB_1 \perp SC$ .

Vậy  $SC \perp (AB_1D_1)$ .

Gọi  $O = AC \cap BD, O_1 = B_1D_1 \cap SO$  thì  $C_1 = AO_1 \cap SC$ .

Mặt khác  $\triangle SAB = \triangle SAD$  (c.g.c) nên  $B_1D_1 \parallel BD$ .

Ta lại có  $BD \perp (SAC)$

$$\Rightarrow B_1D_1 \perp (SAC) \Rightarrow B_1D_1 \perp AC_1.$$

$$\text{Từ đó} \quad S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot B_1D_1.$$

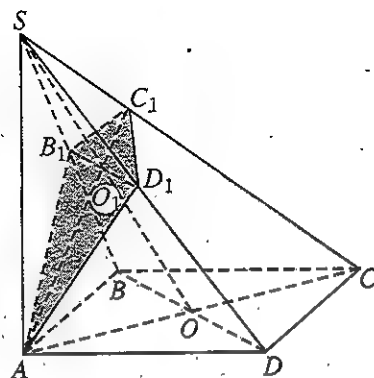
$$\text{Ta có} \quad AC_1 = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SB_1 \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{a^2}{2a^2}$$

$$\Rightarrow B_1D_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

(Chú ý. Có thể thấy  $B_1, D_1$  thứ tự là trung điểm của  $SB$  và  $SD$  nên  $B_1D_1 \parallel BD$   
và  $B_1D_1 = \frac{1}{2}BD$ ).

$$\text{Vậy} \quad S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$



Hình 170

40. (h.171)

a) Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$  thì  $AI \perp BC$ ,  $MI \perp BC$ . Vậy  $K$  thuộc  $MI$ . Ta cũng có  $BC \perp (MAI)$ . Do  $\Delta_1$  đi qua  $K$  và  $\Delta_1 \perp (MBC)$  nên  $\Delta_1 \perp BC$ . Vậy  $\Delta_1$  nằm trong mp( $MAI$ ). Gọi giao điểm của  $\Delta_1$  với  $AI$  là  $H$  thì  $HK \perp MC$ , mặt khác  $BK \perp MC$ , từ đó  $MC$  vuông góc với  $(BHK)$  hay  $MC \perp BH$ .

Từ  $\Delta \perp (ABC)$ ,  $BH \perp MC$  nên  $BH \perp AC$ . Vậy  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Điều này chứng tỏ khi  $M$  thay đổi trên  $\Delta$  thì  $\Delta_1$  đi qua điểm cố định là trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

b) Vì  $\Delta_1$  là đường thẳng  $HK$  nên  $\Delta_1$  cắt  $\Delta$  tại điểm  $N$ .

Theo câu a), ta có  $MC$  vuông góc với  $(BHK)$  mà  $BN$  thuộc mặt phẳng này, vậy  $NB$  vuông góc với  $MC$ .

Tương tự như trên, ta cũng có  $MB \perp NC$ .

Từ  $\Delta AHN \sim \Delta AMI$ , ta có  $\frac{AH}{AM} = \frac{AN}{AI} \Rightarrow AH \cdot AI = AM \cdot AN$ .

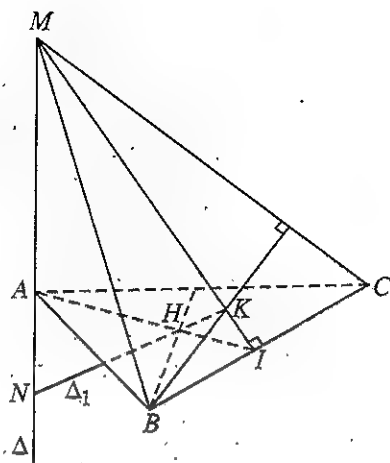
Mặt khác  $AH \cdot AI = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}$

do đó  $AM \cdot AN = \frac{a^2}{2}$ .

Ta có  $MN = AM + AN$ .

Vậy  $MN$  ngắn nhất khi và chỉ khi  $AM = AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Hệ thức này xác định điểm  $M$  để  $MN$  có độ dài ngắn nhất.



Hình 171

41. (h.172)

a)  $\forall (ABC) \perp (SAB)$

$(SBC) \perp (SAB)$

mà  $BC = (ABC) \cap (SBC)$  nên

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Như vậy, tứ diện  $SABC$  có  $\widehat{SAC} = 90^\circ$  và  $\widehat{SBC} = 90^\circ$  nên điểm cách đều  $S, A, B, C$  là trung điểm của  $SC$ .

Chú ý. Có thể chứng minh  $BC \perp SB$  như sau :

Kẻ  $AB_1 \perp SB$ , do  $(SAB) \perp (SBC)$  nên  $AB_1 \perp (SBC)$

$\Rightarrow AB_1 \perp BC,$

mặt khác  $BC \perp SA$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB.$

b) Kẻ  $AB_1 \perp SB, AC_1 \perp SC$ , để chứng minh được

$AB_1 \perp (SBC)$  và

$(AB_1C_1) \perp SC.$

Từ đó  $\widehat{AC_1B_1}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SCA)$  và  $(SCB)$ .

Xét  $\triangle AB_1C_1$  ta có  $AB_1 = B_1C_1 \tan 60^\circ$

mà  $AB_1 = SB_1 \tan \alpha, B_1C_1 = SB_1 \sin 45^\circ.$

Vậy hai mặt phẳng  $(SCA)$  và  $(SCB)$  tạo với nhau góc  $60^\circ$  khi và chỉ khi

$$SB_1 \tan \alpha = SB_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Hệ thức này xác định  $\alpha$ .

42. (h.173)

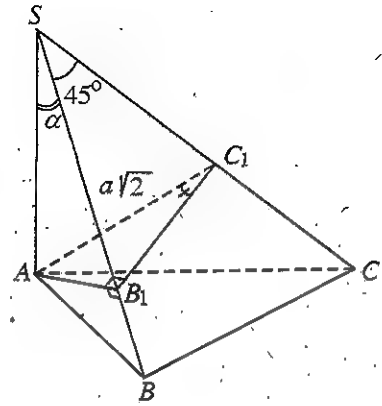
a) Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$  thì

$SH \perp AB.$

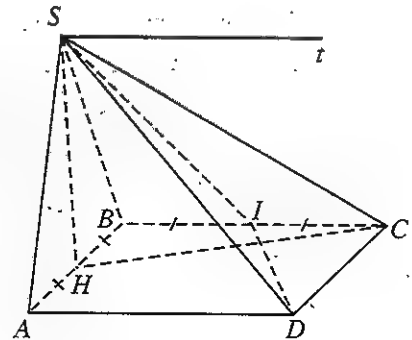
Do  $(SAB) \perp (ABCD)$  nên

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AD,$

mặt khác  $AD \perp AB.$



Hình 172



Hình 173

Vậy  $AD \perp (SAB)$ .

Từ đó  $(SAD) \perp (SAB)$ .

Tương tự như trên, ta có

$$(SBC) \perp (SAB).$$

b) Giả sử  $(SAD) \cap (SBC) = St$ , dễ thấy  $St \parallel AD$ , từ đó  $mp(ASB) \perp St$ . Do  $\widehat{ASB} = 60^\circ$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$  bằng  $60^\circ$ .

c) Vì  $ABCD$  là hình vuông;  $H, I$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$  nên  $HC \perp DI$ , mặt khác  $DI \perp SH$ . Vậy  $DI \perp (SHC)$ , từ đó  $(SDI) \perp (SHC)$ .

#### 43. (h.174)

a) Vì  $MN \perp AB$ ,  $SO \perp AB$  nên  $AB \perp (SMN)$ .

$\Rightarrow (SAB) \perp (SMN)$ . Vậy góc giữa  $(SMN)$  và  $(SAB)$  bằng  $90^\circ$ .

Tương tự như trên, góc giữa  $(SMN)$  và  $(SCD)$  cũng bằng  $90^\circ$ .

Như vậy với  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $h$  tùy ý thì  $(SMN)$  vuông góc cả với hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

b) Dễ thấy  $(SAB) \cap (SCD) = St$ ,  $St \parallel AB$ .

Như vậy  $St \perp (SMN)$ , từ đó  $\widehat{MSN}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{MSN}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

Tính  $\widehat{MSN}$ .

$$\text{Ta có } SM^2 = SN^2 = h^2 + a^2.$$

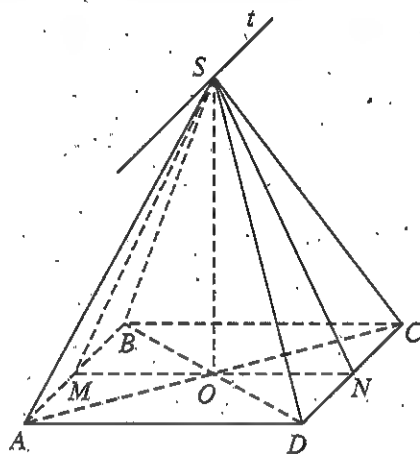
$$MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2SM \cdot SN \cos \widehat{MSN}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = h^2 + a^2 + h^2 + a^2 - 2(h^2 + a^2) \cos \widehat{MSN}$$

$$\text{tức là } \cos \widehat{MSN} = \frac{2h^2 - 2a^2}{2(h^2 + a^2)} = \frac{h^2 - a^2}{h^2 + a^2}.$$

$$\text{Vậy góc giữa hai mặt phẳng } (SAB) \text{ và } (SCD) \text{ là } \alpha \text{ mà } \cos \alpha = \left| \frac{h^2 - a^2}{h^2 + a^2} \right|.$$

Từ đó hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  vuông góc khi và chỉ khi  $h = a$ .



Hình 174

44. (h.175)

a) Dễ thấy

$$(SAB) \perp (ABCD)$$

$$(SAD) \perp (ABCD)$$

nên góc giữa mặt bên  $(SAB)$  và  $(SAD)$  với mp $(ABCD)$  bằng  $90^\circ$ .

Ta có  $(SDA) \perp CD$  và  $SDA$  là tam giác vuông tại  $A$  nên  $\widehat{SDA}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SDC)$  và  $(ABCD)$ .

$$\text{Từ đó } \tan \widehat{SDA} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự, } \tan \widehat{SBA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ.$$

Vậy mp $(SCD)$  tạo với mp $(ABCD)$  góc bằng  $\varphi$  mà  $\tan \varphi = \frac{1}{2}$  và mp $(SBC)$  tạo với mp $(ABCD)$  góc  $45^\circ$ .

b) Vì  $(SAD) \perp (SAB)$  nên góc giữa hai mặt phẳng đó bằng  $90^\circ$ .

Ta cũng có  $CD \perp (SAD)$  nên  $(SCD) \perp (SAD)$ . Vậy góc giữa hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SCD)$  bằng  $90^\circ$ . Tương tự, ta cũng có góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  bằng  $90^\circ$ .

Ta cần phải tính góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SCD)$ .

Trong mp $(ABCD)$ , kẻ qua  $A$  đường thẳng vuông góc với  $AC$ , nó cắt hai đường thẳng  $BC$  và  $DC$  lần lượt tại  $I$  và  $J$ ; thì  $IJ \perp SC$ .

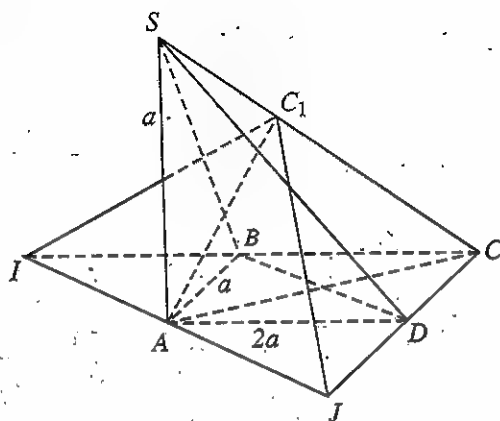
Trong mp $(SAC)$  kẻ  $AC_1 \perp SC$  thì  $(IJC_1) \perp SC$ .

Do đó,  $\widehat{IC_1J}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{IC_1J}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SCD)$ .

$$\text{Ta có } AJ = AC \tan \widehat{ACD} = 2a\sqrt{5}.$$

$$\frac{1}{AC_1^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{5a^2} = \frac{6}{5a^2}$$

$$\Rightarrow AC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$



Hình 175.

$$\text{Đặt } \widehat{AC_1J} = \alpha \text{ thì } \tan \alpha = \frac{AJ}{AC_1} = \frac{2a\sqrt{5}}{\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Đặt } \widehat{AC_1I} = \beta \text{ thì } \tan \beta = \frac{AI}{AC_1} = \frac{AC \tan \widehat{ACI}}{AC_1} = \frac{a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Đặt } \widehat{IC_1J} = \varphi \text{ thì } \tan \varphi = \frac{2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}}{1 - 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy góc giữa mp}(SBC) \text{ và } (SCD) \text{ là } 180^\circ - \varphi \text{ mà } \tan \varphi = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

45. (h.176)

a) Vì  $AD \perp (DBC)$  nên  $AD \perp BC$ .

Mặt khác  $AE \perp BC$ . Vậy  $BC \perp (ADE)$ , từ đó ta có  $(ABC) \perp (ADE)$ .

Vì  $K$  là trực tâm tam giác  $DBC$  nên  $BK \perp DC$ . Theo giả thiết  $AD \perp (DBC)$ , vậy  $BK \perp AC$  (định lý ba đường vuông góc). Kết hợp với  $BF \perp AC$  ta có  $AC \perp (BFK)$ , từ đó  $\text{mp}(ABC) \perp \text{mp}(BFK)$ .

b) Từ câu a), ta có  $\text{mp}(BFK) \perp \text{mp}(ABC)$

$$\text{mp}(ADE) \perp \text{mp}(ABC)$$

$$HK = \text{mp}(ADE) \cap \text{mp}(BFK).$$

Vậy  $HK \perp \text{mp}(ABC)$ .

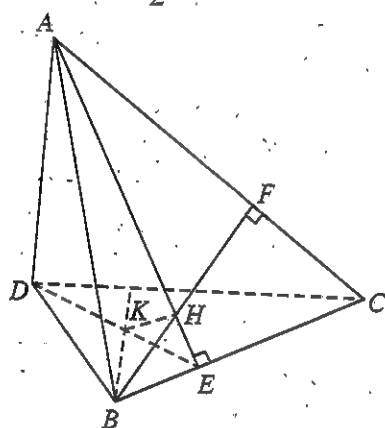
46. (h.177)

$$\text{a) Ta có } AC^2 + BD^2 = 4a^2, AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

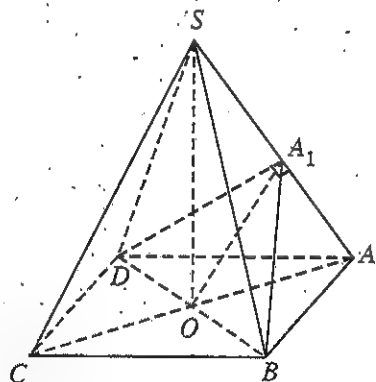
$$\text{nên } BD^2 = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow OB^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Xét tam giác vuông  $SOB$ , ta có

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Hình 176



Hình 177

Vậy tam giác  $SAC$  có trung tuyến  $SO$  bằng nửa  $AC$  nên  $SAC$  là tam giác vuông tại  $S$ .

b) Trong mặt phẳng  $(SOA)$  kẻ  $OA_1$  vuông góc với  $SA$  thì  $SA \perp mp(A_1BD)$ , từ đó  $\widehat{BA_1D}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{BA_1D}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } OA_1 &= \frac{OA \cdot OS}{SA} = \frac{OA \cdot OS}{\sqrt{OA^2 + OS^2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác  $BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ , từ đó  $\widehat{BA_1D} = 90^\circ$  hay hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  vuông góc.

47. (h.178)

a) Vì  $BB' = 3CC'$  nên đường thẳng

$B'C'$  cắt  $BC$  tại điểm  $I$  thì  $BI = \frac{3}{2}BC$ .

Như vậy  $I$  là điểm cố định, mặt khác giao tuyến của  $mp(AB'C')$  và  $mp(ABC)$  là  $AI$ . Như vậy, khi  $B', C'$  thay đổi thì giao tuyến của  $mp(AB'C')$  và  $mp(ABC)$  là đường thẳng  $AI$  cố định.

b) Khi  $BB' = a$  thì  $CC' = \frac{a}{3}$ . Dễ thấy

$$BC = a\sqrt{3}. \text{ Do } CI = \frac{1}{2}BC$$

$$\text{nên } CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

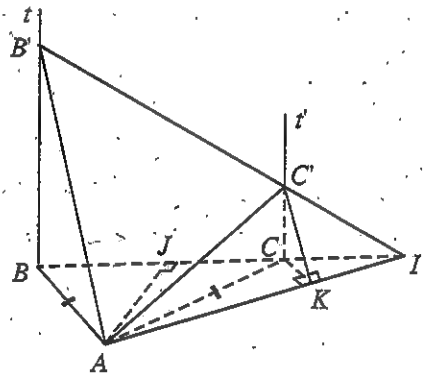
$$\text{Ta có } AJ = \frac{a}{2} \text{ (} AJ \perp BC, J \in BC \text{) và } IJ = a\sqrt{3}.$$

Kẻ  $CK \perp AI$ , do  $C'C \perp (ABC)$  nên  $C'K \perp AI$ .

Vậy  $\widehat{CKC'}$  là góc giữa  $mp(AB'C')$  và  $mp(ABC)$ .

$$\text{Ta có } \frac{CK}{AJ} = \frac{CI}{AI};$$

$$AI^2 = AJ^2 + IJ^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13a^2}{4} \text{ nên } AI = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$



Hình 178

Từ đó 
$$CK = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{13}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

Đặt  $\widehat{CKC'} = \varphi$  thì  $\tan \varphi = \frac{CC'}{CK} = \frac{a}{3} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{2\sqrt{39}}{9}.$

Như thế góc giữa  $mp(AB'C')$  và  $mp(ABC)$  là  $\varphi$  mà  $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{39}}{9}.$

Tam giác  $AB'C'$  có hình chiếu trên  $mp(ABC)$  là tam giác  $ABC$  mà 
$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy 
$$S_{AB'C'} = \frac{S_{ABC}}{\cos \varphi} = \frac{a^2\sqrt{79}}{12}.$$

(Tính  $\cos \varphi$  nhờ  $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{39}}{9}$  được  $\cos \varphi = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{79}}).$

48. (h.179)

Trong  $mp(Q)$ , kẻ qua  $I$  đường thẳng song song với  $JN$  và kẻ qua  $N$  đường thẳng song song với  $IJ$ , chúng cắt nhau tại  $K$ .

Để thấy  $MI \perp NK$ , tứ giác  $IJNK$  là hình chữ nhật.

Như vậy  $MI \perp NK$ ,  $IK \perp KN$ , từ đó  $MK \perp KN$ , ngoài ra  $IK = b$ ,  $NK = c$ .

Vì  $MI$  và  $IK$  cũng vuông góc với  $IJ$ .

Vậy  $\widehat{MIK}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{MIK}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

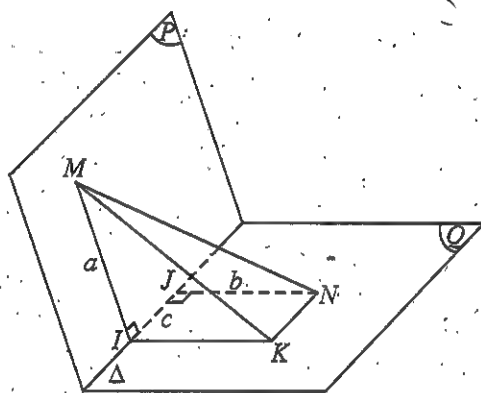
Ta có

$$MN^2 = MK^2 + KN^2 = MK^2 + c^2;$$

$$MK^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{MIK}.$$

Vậy 
$$MN = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{MIK} + c^2}$$

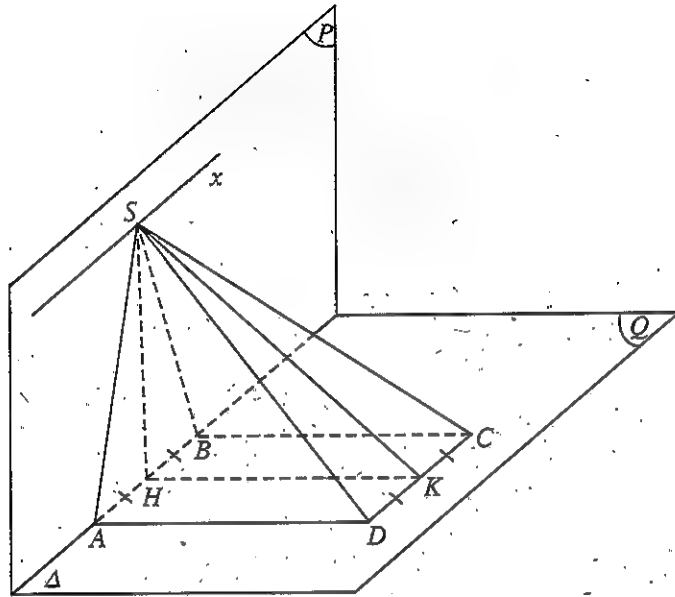
hoặc 
$$MN = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \widehat{MIK} + c^2}.$$



Hình 179



49. a) (h.180)



Hình 180

Để thấy mp(SCD) cắt (P) theo giao tuyến  $Sx$ ,  $Sx \parallel AB$ .

Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  thì  $Sx \perp mp(SHK)$  và tam giác  $SHK$  vuông tại  $H$ . Suy ra  $\widehat{HSK}$  là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (P). Ta có

$$\tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{HS} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy nếu gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (P) thì  $\varphi$  là góc thoả mãn

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự như trên thì  $\widehat{HKS}$  là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (Q).

Ta có 
$$\tan \widehat{HKS} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

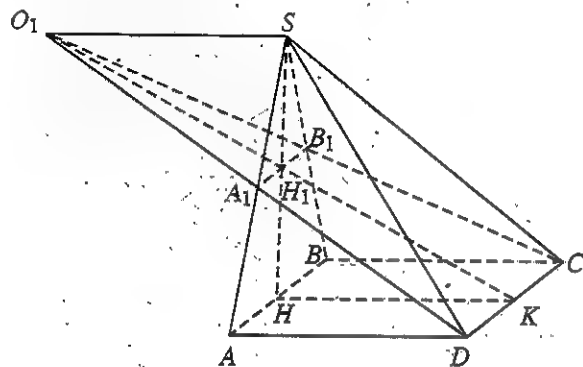
b) (h.181)

Để thấy ba điểm  $O_1, H_1, K$  thẳng hàng (do  $H_1$  là giao điểm của  $SH$  với  $A_1B_1$ ) và  $H_1O_1 = H_1K$ . Mặt khác  $H_1S = H_1H$ . Suy ra  $O_1S \parallel HK$ .

Do  $HK \perp AB$  và  $(SAB) \perp (ABCD)$  nên  $HK \perp (SAB)$ .

Vậy  $O_1S \perp (SAB)$ , từ đó  $O_1S \perp AB$  và  $O_1S \perp SA$ .

Vì  $AB \parallel CD$ , từ đó  $O_1S \perp SA$  và  $O_1S \perp CD$ .



Hình 181

Góc giữa hai mặt phẳng  $(A_1B_1O_1)$  và  $(Q)$  chính là  $\widehat{H_1KH}$ .

$$\tan \widehat{H_1KH} = \frac{HH_1}{HK} = \frac{a\sqrt{3}}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Góc giữa hai mặt phẳng  $(A_1B_1O)$  và  $(P)$  chính là  $\widehat{HH_1K}$ .

Ta có 
$$\tan \widehat{HH_1K} = \frac{HK}{HH_1} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

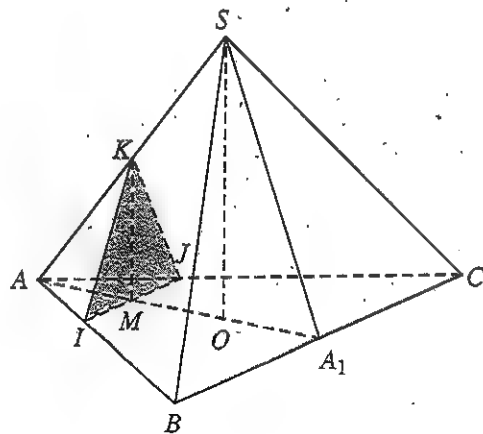
50. a) Vì  $SO \perp AA_1, BC \perp AA_1, (P) \perp AA_1$  và  $(P)$  qua  $M$  nên  $(P)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $M$  và song song với  $SO, BC$ .

Trường hợp  $x = 0$ , thiết diện là điểm  $A$ .

Trường hợp  $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$  (h.182).

$(P) \cap (ABC) = IJ$ ,  $IJ$  đi qua điểm  $M$  và  $IJ \parallel BC$ .

$(P) \cap (SAO) = MK, MK \parallel SO$ .



Hình 182

Vậy thiết diện của hình chóp  $S.ABC$  khi cắt bởi  $(P)$  là tam giác  $IKJ$ . Để thấy  $IKJ$  là tam giác cân tại  $K$ .

Trường hợp  $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (h.183).

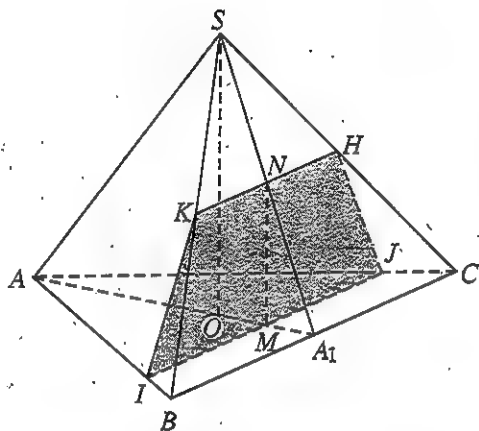
$(P) \cap (ABC) = IJ$ ,  $IJ$  đi qua  $M$  và  $IJ \parallel BC$

$(P) \cap (SOA_1) = MN$ ,  $MN \parallel SO$

$(P) \cap (SBC) = HK$ ,  $HK$  đi qua  $N$  và  $HK \parallel BC$ .

Vậy thiết diện thu được là hình thang  $IJHK$ .

Mặt khác  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $IJ, HK$ ;  $MN \parallel SO$ ;  $SO \perp (ABC)$  nên  $MN \perp IJ$ . Vậy tứ giác  $IJHK$  là hình thang cân.



Hình 183

Trường hợp  $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , thiết diện là đoạn thẳng  $BC$ .

b) Trường hợp  $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$S_{IJK} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK.$$

$$\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}.$$

Vậy  $S_{IJK} = 2x^2$ .

Trường hợp  $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$S_{IJHK} = \frac{1}{2} (IJ + HK) \cdot MN.$$

Ta có

$$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{HK}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} \Rightarrow HK = 2(x\sqrt{3} - a);$$

$$\frac{MN}{SO} = \frac{MA_1}{A_1O} \Rightarrow MN = 2(3a - 2x\sqrt{3}).$$

$$\text{Vậy } S_{IJHK} = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3}).$$

Để thấy khi  $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$  thì diện tích thiết diện lớn nhất khi và chỉ khi

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Lúc đó diện tích thiết diện bằng } \frac{2a^2}{3}.$$

Khi  $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$  thì diện tích thiết diện là :

$$S_{IJHK} = \frac{1}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(6a - 4x\sqrt{3}).$$

Từ đó, suy ra diện tích thiết diện lớn nhất khi và chỉ khi  $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$ .

Lúc đó diện tích thiết diện bằng  $\frac{3a^2}{4}$ .

Vậy khi  $M$  thay đổi trên  $AA_1$  thì diện tích thiết diện lớn nhất bằng  $\frac{3a^2}{4}$ , lúc đó  $M$  được xác định bởi

$$AM = x = \frac{3a\sqrt{3}}{8} \text{ hay } \frac{AM}{AA_1} = \frac{3}{4}.$$

51. (h.184)

a) Vì  $(SEF) \perp (ABCD)$

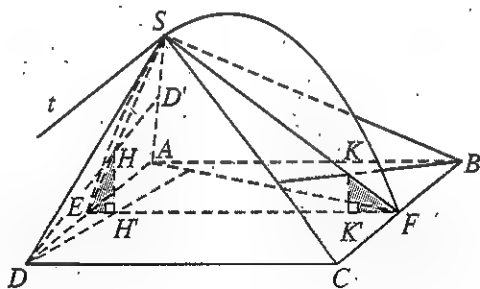
và  $AD \perp EF$

nên  $AD \perp (SEF)$ .

Từ đó  $(SEF) \perp (SAD)$ .

Tương tự  $(SEF) \perp (SBC)$ .

Để thấy  $(SAD) \cap (SBC) = St, St \parallel AD$ .



Hình 184

Do  $AD \perp (SEF)$ , từ đó  $St \perp (SEF)$ , tức là  $\widehat{ESF}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{ESF}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .

Vì  $S$  thuộc đường tròn đường kính  $EF$  nên  $\widehat{ESF} = 90^\circ$ .

Vậy  $(SAD) \perp (SBC)$ .

b) Kẻ  $DD' \perp SA$ .

Do  $SF \perp (SAD) \Rightarrow SF \perp DD'$   
 $\Rightarrow DD' \perp (SAF) \Rightarrow DD' \perp AF$ .

Mặt khác  $HH' \perp (ABCD)$  nên  $DH' \perp AF$  (định lý ba đường vuông góc).

Ta lại có  $H'$  thuộc  $EF$ . Vậy  $H'$  là trực tâm tam giác  $ADF$ , từ đó  $H'$  cố định.

Tương tự  $K'$  cũng là điểm cố định.

Ta có  $\triangle HHE \sim \triangle FKK'$ , do đó

$$\frac{HH'}{KF} = \frac{HE}{KK'} \Rightarrow HH' \cdot KK' = HE \cdot KF.$$

Như vậy  $HH' \cdot KK'$  không đổi.

Chú ý. Có thể tính  $HH' \cdot KK'$  qua  $a, b$ .

Thật vậy,  $\triangle EDH' \sim \triangle EFA \Rightarrow \frac{EH'}{EA} = \frac{DE}{FE} \Rightarrow EH' = \frac{a^2}{4b}$ .

Tương tự, ta cũng có  $FK' = \frac{a^2}{4b}$ .

Vậy  $HH' \cdot KK' = \frac{a^4}{16b^2}$  không đổi.

52. (h.185)

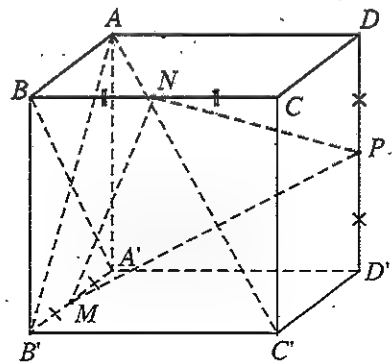
a) Ta có  $C'B' \perp (ABB'A')$ ,  $B'A \perp A'B$  nên  $A'B \perp AC'$  (định lý ba đường vuông góc).

Vậy góc giữa  $AC'$  và  $A'B$  bằng  $90^\circ$ .

b) Ta có

$$\begin{aligned} NP^2 &= NC^2 + CD^2 + DP^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có  $MN^2 = MP^2 = \frac{3a^2}{2}$ .



Hình 185

Vậy  $MNP$  là tam giác đều.

Mặt khác  $AN^2 = AP^2 = AM^2 = \frac{5a^2}{4}$  ;

$$C'N^2 = C'P^2 = C'M^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Từ đó  $AC' \perp (MNP).$

53. (h.186)

a) Vì  $AC \parallel A'C'$  nên góc giữa  $AC$  và  $BC'$  bằng góc giữa  $A'C'$  và  $BC'$ .

Gọi  $H'$  là trung điểm của  $A'C'$ , do  $BA' = BC'$  nên  $\widehat{BHC'} = 90^\circ$ . Vậy  $\widehat{H'C'B}$  là góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BC'$ . Đặt  $\widehat{H'C'B} = \alpha$  thì

$$\cos \alpha = \frac{H'C'}{BC'} = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Vậy góc giữa  $AC$  và  $BC'$  là  $\alpha$  mà

$$\cos \alpha = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

b) Lấy  $B_1$  thuộc  $B'B$  sao cho  $BB' = BB_1$ , khi đó  $CB_1 \parallel C'B$ . Vậy mp(P) đi qua  $M$ , song song với  $BC'$  và  $A'C$  chính là mặt phẳng đi qua điểm  $M$  và song song với mp( $A'CB_1$ ).

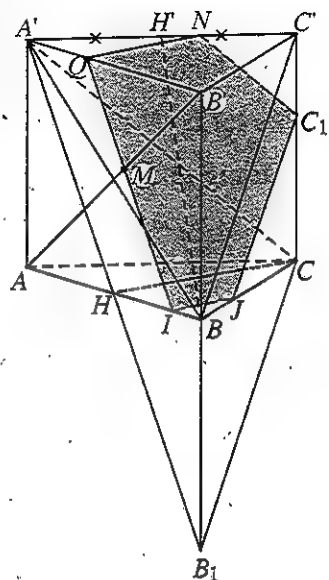
Để thấy mp( $A'CB_1$ ) cắt hình lăng trụ đã cho theo thiết diện là  $A'HC$  còn (P) cắt hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  theo thiết diện  $IJC_1NQ$ , trong đó  $IQ$  là đường thẳng đi qua điểm  $M$  và song song với  $A'H$ , còn  $IJ \parallel HC$ ,  $JC_1 \parallel BC'$ ,  $C_1N \parallel A'C$ .

Ta có  $\frac{C_1C}{C_1C'} = \frac{CJ}{B'J} = \frac{HI}{IB}$ .

Đặt  $HI = x$ . Do  $\frac{MA}{MB'} = \frac{5}{4}$  nên  $\frac{AI}{B'Q} = \frac{5}{4}$

hay  $\frac{\frac{a}{2} + x}{a - x} = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow 2a + 4x = 5a - 5x \Rightarrow x = \frac{a}{3}.$$



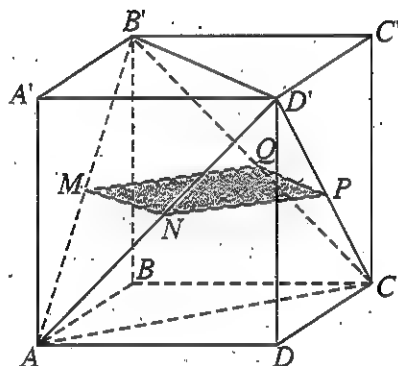
Hình 186

Khi đó  $IB = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$ .

Vậy  $\frac{C_1C}{C_1C'} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{6}} = 2$ .

54. (h.187)

Vì  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình lập phương nên  $AB'CD'$  là tứ diện đều có cạnh  $a\sqrt{2}$  ( $a$  là cạnh của hình lập phương). Để thấy thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ , trong đó  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB', AD', D'C, B'C$ . Do  $AB'CD'$  là tứ diện đều nên  $B'D' \perp AC$ .



Hình 187

Vậy tứ giác  $MNPQ$  là hình vuông

cạnh bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Từ đó  $S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2}$ .

*Chú ý.* Có thể chiếu tứ giác  $MNPQ$  xuống mặt phẳng  $(ABCD)$  theo phương chiếu  $A'A$  được tứ giác  $M_1N_1P_1Q_1$  trong đó  $M_1, N_1, P_1, Q_1$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD, CD, BC$  và

$$S_{MNPQ} = S_{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}.$$

Nếu hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  được thay bởi hình hộp chữ nhật với  $AB = a, BC = b, AA' = c$  thì thiết diện thu được vẫn là tứ giác  $MNPQ$  và  $MNPQ$  là hình thoi có độ dài hai đường chéo  $MP$  và  $NQ$  lần lượt là  $b, a$ . Do đó

$$S_{MNPQ} = \frac{ab}{2}.$$

*Chú ý.* Thực hiện như phần chú ý ở trên thì

$$S_{MNPQ} = S_{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{ab}{2}.$$

55. (h.188)

a) Vì  $AB \parallel A'B'$  nên góc giữa  $C_1B$  và  $A'B'$  là góc giữa  $C_1B$  và  $AB$ . Dễ thấy  $AC_1 = BC_1$  nên  $\triangle AC_1B$  là tam giác cân. Từ đó  $\widehat{ABC_1} < 90^\circ$ . Vậy góc giữa  $AB$  và  $BC_1$  là  $\widehat{ABC_1}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  thì

$$MB = \frac{a}{2}, \quad BC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad MB \perp MC_1.$$

$$\text{Từ đó } \cos \widehat{C_1BA} = \frac{MB}{C_1B} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Cũng từ kết quả trên, ta có  $(C_1MC) \perp AB$  và  $\triangle C_1MC$  là tam giác vuông tại  $C$  nên góc giữa  $\text{mp}(C_1AB)$  và  $(CAB)$  là  $\widehat{C_1MC}$ .

$$\text{Ta có } \tan \widehat{C_1MC} = \frac{C_1C}{MC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy  $\widehat{C_1MC} = 30^\circ$  hay góc giữa  $\text{mp}(C_1AB)$  và  $\text{mp}(ABC)$  bằng  $30^\circ$ .

b)  $ABB'A'$  là hình vuông. Dễ thấy  $C_1A = C_1B = C_1A' = C_1B' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

Khi đó  $C_1O \perp AB'$ ,  $C_1O \perp A'B$  ( $O = A'B \cap AB'$ ).

Vậy  $C_1.ABB'A'$  là hình chóp tứ giác đều.

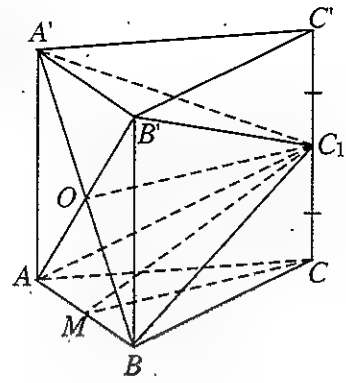
c) Trong  $\text{mp}(M, CC')$  kẻ tia  $Mt$  sao cho  $\widehat{CMt} = \varphi$  thì  $\text{mp}(AB, Mt)$  chính là mặt phẳng  $(P)$  phải tìm.

– Nếu  $0^\circ \leq \varphi \leq \widehat{C_1MC}$  thì thiết diện là tam giác  $ABN$  (h.189).

$$\text{Khi đó } S_{ABN} = \frac{1}{2} AB \cdot MN$$

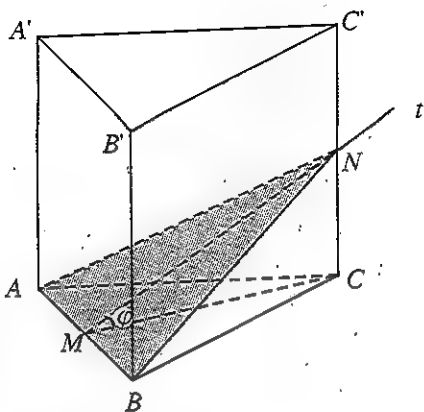
$$AB = a, \quad MN = \frac{MC}{\cos \varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cos \varphi}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABN} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi}.$$

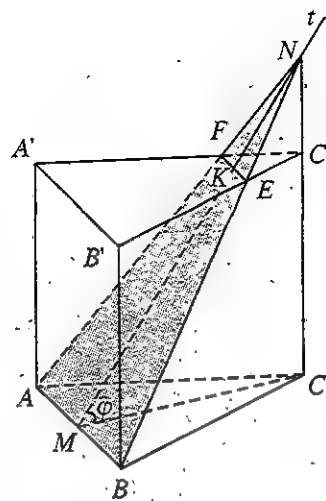


Hình 188





Hình 189



Hình 190

– Nếu  $\widehat{CMC} < \varphi < 90^\circ$  thì thiết diện là hình thang cân  $ABEF$  (h.190).

Khi đó  $S_{ABEF} = S_{ABN} - S_{EFN}$ .

Ta có  $S_{ABN} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi}$

$$\frac{S_{EFN}}{S_{ABN}} = \left( \frac{NE}{NB} \right)^2 = \left( \frac{NC}{NC'} \right)^2 = \frac{\left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \varphi - a \right)^2}{\left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \varphi \right)^2} = \frac{(\sqrt{3} \tan \varphi - 2)^2}{3 \tan^2 \varphi}$$

$$\text{Vậy } S_{EFN} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi} \cdot \frac{(\sqrt{3} \tan \varphi - 2)^2}{3 \tan^2 \varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } S_{ABEF} &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi} \cdot \left[ 1 - \frac{(\sqrt{3} \tan \varphi - 2)^2}{3 \tan^2 \varphi} \right] \\ &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{12 \tan^2 \varphi \cos \varphi} \cdot (4\sqrt{3} \tan \varphi - 4) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3 \tan \varphi \sin \varphi} (\sqrt{3} \tan \varphi - 1). \end{aligned}$$

– Nếu  $\varphi = 90^\circ$  thì thiết diện là hình vuông  $ABB'A'$ . Khi đó diện tích thiết diện bằng  $a^2$ .

## §5. Khoảng cách

56. (h.191)

a) Học sinh tự chứng minh.

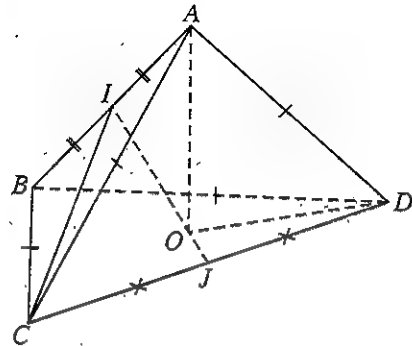
b) Gọi  $O$  là điểm cách đều các đỉnh  $A, B, C, D$  thì  $O$  thuộc đường thẳng  $IJ$ . Khi đó  $OA = OD$ . Điều này xảy ra khi và chỉ khi  $IA^2 + IO^2 = OJ^2 + JD^2$ , đặt  $IO = x$  ta có đẳng thức

$$\frac{a^2}{4} + x^2 = (a - x)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}a.$$

Như vậy, khoảng cách từ điểm  $O$  đến mỗi đỉnh của tứ diện  $ABCD$  bằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$



Hình 191

57. (h.192)

a) Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$  thì

$NH \parallel SA$ .

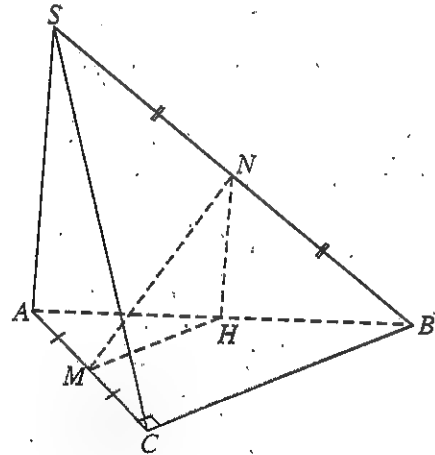
Do  $SA \perp (ABC)$  nên  $NH \perp (ABC)$ , từ đó  $\widehat{NHM} = 90^\circ$ . Vậy

$$MN^2 = NH^2 + HM^2$$

$$= \frac{SA^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = \frac{1}{4}(h^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + b^2}.$$

b)  $h = b$ .



Hình 192

58. (h.193)

a) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  thì  $OA = OC, OB = OD$ .

Vì  $SB = SD = CB = CD$  nên  $\triangle BCD = \triangle BSD$ , từ đó  $SO = OC = OA$ .

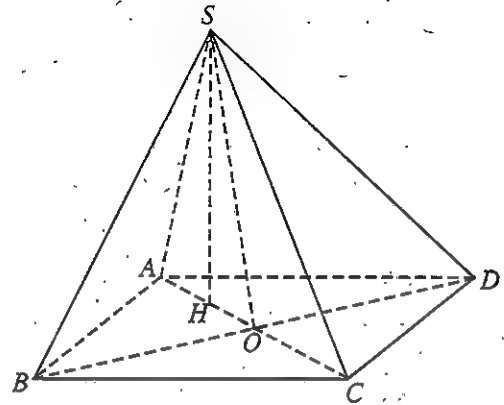
Vậy  $SAC$  là tam giác vuông tại  $S$ .

b)  $\left. \begin{array}{l} AC \perp BD \\ SO \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC),$

từ đó  $(SAC) \perp (ABCD)$ .

Vậy nếu kẻ đường cao  $SH$  của tam giác  $SAC$  thì  $SH \perp (ABCD)$ ,

$$\text{do đó } d(S; \text{mp}(ABCD)) = SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$



Hình 193

59. (h.194)

a) Ta có  $CD \perp (SAD)$  nên  $(CDA_1) \perp (SAD)$ . Từ đó, khi kẻ đường cao  $SH$  của tam giác  $SA_1D$  thì

$$SH \perp \text{mp}(CDA_1)$$

và  $SH = d(S; \text{mp}(CDA_1))$ .

Ta có

$$SH \cdot A_1D = 2S_{SA_1D} = S_{SAD} = \frac{a^2}{2}$$

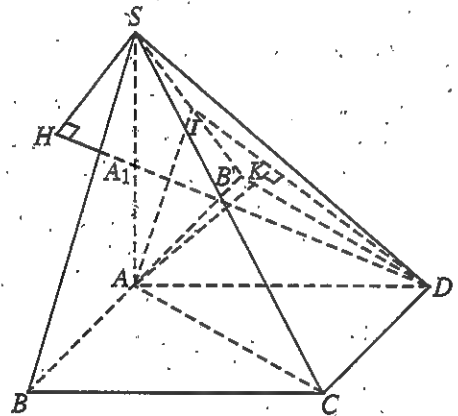
$$A_1D = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy } SH = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

b) Kẻ qua  $D$  đường thẳng song song với  $AC$ , cắt đường thẳng  $AB$  tại  $B'$ , khi đó  $B'D = a\sqrt{2}, AB' = a, SB' = a\sqrt{2}, SD = a\sqrt{2}$ .

Vậy  $SB'D$  là tam giác đều. Gọi  $I$  là trung điểm của  $SB'$  thì

$$DI = \frac{a\sqrt{6}}{2}, SB' \perp (AID)$$



Hình 194

từ đó  $(AID) \perp (SB'D)$ .

Vậy khi kẻ đường cao  $AK$  của tam giác  $AID$  thì  $AK$  là khoảng cách từ  $A$  đến mp( $SB'D$ ). Mặt khác  $AC \parallel (SB'D)$  nên  $AK$  cũng là khoảng cách giữa  $AC$  và  $SD$ .

Ta có  $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $AD = a$ .

Vì  $AD \perp (SAB)$  nên  $AD \perp AI$ .

Do đó  $AK = \frac{AI \cdot AD}{DI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

Vậy khoảng cách giữa  $AC$  và  $SD$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

60. (h.195)

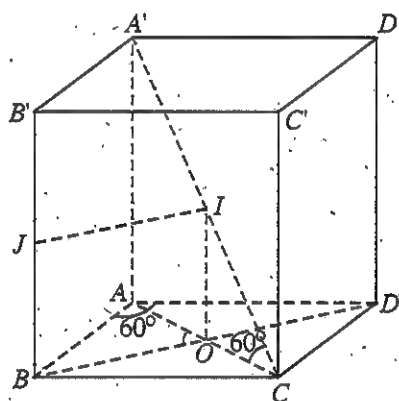
a) Dễ thấy  $\widehat{A'CA} = 60^\circ$ .

Do  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$  và  $\widehat{A} = 60^\circ$  nên  $AC = a\sqrt{3}$ .

Đường cao của hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  chính là  $A'A$ . Mặt khác

$A'A = AC \tan \widehat{A'CA} = a\sqrt{3} \tan 60^\circ = 3a$ .

b) Ta có  $BB' \parallel (A'AC)$  và  $BO \perp (A'AC)$  với  $O$  là tâm của hình thoi  $ABCD$  (giao điểm của hai đường chéo).



Hình 195

Kẻ  $OI \parallel AA'$  và kẻ  $IJ \parallel BO$  thì dễ dàng chứng minh được  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $BB'$  và  $A'C$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BB'$

và  $A'C$  chính là  $BO$ . Mặt khác  $BO = \frac{a}{2}$ .

Vậy  $d(BB', A'C) = \frac{a}{2}$ .

Chú ý. Có thể tìm thấy đường vuông góc chung của  $BB'$  và  $A'C$  là  $IJ$  ( $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $A'C$  và  $BB'$ ) bằng cách xét tứ diện  $A'B'BC$  có

$$A'B' = BC = a,$$

$$A'B = B'C = \sqrt{a^2 + BB'^2}.$$

61. (h.196)

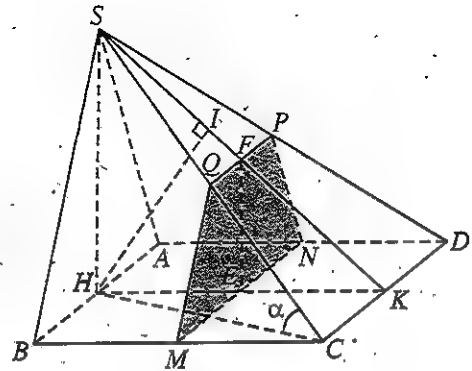
a) Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$  thì  $SH \perp AB$ , từ đó  $SH \perp (ABCD)$ . Vậy khoảng cách từ  $S$  đến mp( $ABCD$ ) là  $SH$ , đó là chiều cao của hình chóp:

Ta có  $SH = HC \tan \alpha$ ,

$$\text{mặt khác } HC^2 = BH^2 + BC^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\text{hay } HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy } SH = \frac{a\sqrt{5}}{2} \tan \alpha$$



Hình 196

b) Gọi  $K$  là trung điểm của  $CD$  thì  $CD \perp (SHK)$ , từ đó  $(SCD) \perp (SHK)$ . Vậy nếu kẻ đường cao  $HI$  của tam giác  $SHK$  thì  $HI$  là khoảng cách từ  $H$  đến mp( $SCD$ ). Ta có

$$HI = \frac{HS \cdot HK}{SK} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2} \tan \alpha \cdot a}{\sqrt{\frac{5a^2}{4} \tan^2 \alpha + a^2}} = \frac{a\sqrt{5} \tan \alpha}{\sqrt{5 \tan^2 \alpha + 4}}$$

c) Vì  $SH$  và  $CD$  cùng vuông góc với  $BC$  nên  $SH, CD$  song song với mặt phẳng trung trực ( $R$ ) của  $BC$ . Khi đó

$(R) \cap (ABCD) = MN$  với  $MN \parallel CD$  và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$ .

$(R) \cap (SHK) = EF, EF \parallel SH, E$  là trung điểm của  $MN$ .

$(R) \cap (SCD) = PQ, PQ$  đi qua điểm  $F$  và  $PQ \parallel CD$ . Thiết diện  $MNPQ$  là hình thang cân.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{MNPQ} &= \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot EF \\ &= \frac{1}{2} \left( a + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} \tan \alpha \\ &= \frac{3a^2\sqrt{5}}{16} \tan \alpha. \end{aligned}$$

62. (h.197)

a) Vì  $ABCD$  là hình thoi và  $\widehat{BAD} = 120^\circ$  nên  $ABC$  là tam giác đều. Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$  thì

$$BC \perp (AIS).$$

Mặt khác  $SAI$  là tam giác vuông tại  $A$  nên  $\widehat{SIA}$  là góc giữa mặt phẳng  $(SBC)$  và mặt phẳng đáy  $(ABCD)$ . Theo giả thiết  $\widehat{SIA} = 60^\circ$ .

Ta có  $BD^2 + AC^2 = 4AB^2$

mà  $AC = AB$  nên

$$AB = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AI = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Vì  $SA \perp (ABCD)$  nên  $SA$  là đường cao của hình chóp  $S.ABCD$ . Ta có

$$SA = AI \cdot \tan 60^\circ.$$

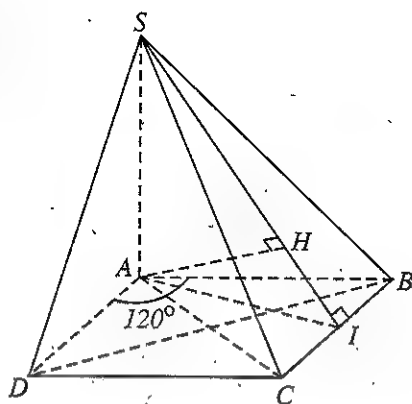
Vậy  $SA = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$

b) Ta có  $BC \perp (SAI)$ , từ đó  $(SAI) \perp (SBC)$ . Vậy nếu kẻ đường cao  $AH$  của tam giác  $SAI$  thì  $AH$  là khoảng cách từ  $A$  đến mp $(SBC)$ . Xét tam giác vuông  $SAI$  ta có

$$AH = \frac{SA \cdot AI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng

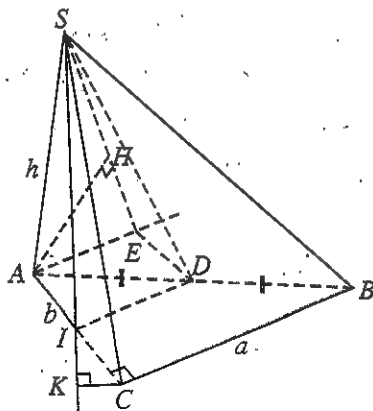
$(SCB)$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .



Hình 197

63. (h.198)

a) Gọi  $E$  là giao điểm của đường thẳng qua  $D$ , song song với  $AC$  và đường thẳng qua  $A$ , song song với  $BC$  thì  $AED$  và  $SED$  là hai tam giác vuông tại  $E$ , do đó  $\widehat{SDE}$  là góc giữa  $SD$  và  $AC$ .



Hình 198

Đặt  $\widehat{SDE} = \alpha$  thì

$$\tan \alpha = \frac{SE}{ED} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}{\frac{b}{2}}$$

hay  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{b}$ .

b) Vì  $AC \parallel (SDE)$  nên  $d(AC; SD) = d(A; (SDE))$ .

Do  $DE \perp (SAE)$  nên  $(SDE) \perp (SAE)$ .

Vậy nếu kẻ đường cao  $AH$  của tam giác vuông  $SAE$  thì  $AH$  là khoảng cách giữa  $AC$  và  $SD$ .

Ta có  $AH = \frac{AS \cdot AE}{SE} = \frac{h \cdot \frac{a}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$ .

Vậy khoảng cách giữa  $AC$  và  $SD$  là  $AH = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$ .

c) Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$  thì  $BC \parallel (SDI)$ .

Do đó  $d(BC; SD) = d(C; (SDI))$ .

Ta có  $DI \perp (SAC)$  nên  $(SDI) \perp (SAC)$ .

Vậy khi kẻ đường cao  $CK$  của tam giác  $SIC$  thì  $CK$  là khoảng cách phải tìm.

Ta có  $S_{SIC} = \frac{bh}{4}$ ,  $SI = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}$

nên  $CK = \frac{\frac{bh}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}}$

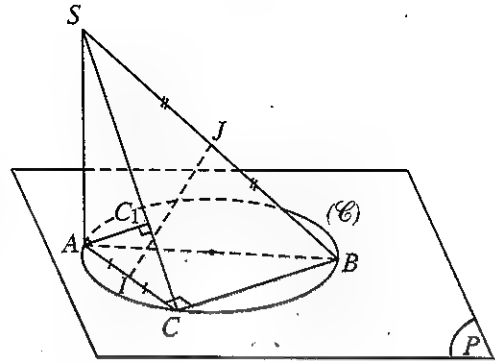
hay  $CK = \frac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}$ .

Vậy khoảng cách giữa  $BC$  và  $SD$  bằng  $\frac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}$ .

64. (h.199)

Cách 1.

Để thấy  $ACB$  là tam giác vuông tại  $C$  mà  $SA \perp (ABC)$  nên  $\widehat{SCB} \doteq 90^\circ$ . Tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$ , tam giác  $SCB$  vuông tại  $C$  mà  $J$  là trung điểm của  $SB$ , từ đó  $AJ = CJ$ . Mặt khác  $IA = IC$ . Vậy  $IJ \perp AC$ . Từ đó,  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$  khi và chỉ khi  $IS = IB$ . Xét các tam giác vuông  $SAI$  và  $BCI$  ta thấy  $IS = IB$  khi và chỉ khi  $SA = BC$ .



Hình 199

Vậy điểm  $C$  thuộc đường tròn đã cho sao cho  $BC = h$  thì  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$ . Chú ý rằng có hai điểm  $C$  như vậy.

Cách 2.

Xét tứ diện  $SABC$  với  $I, J$  là trung điểm của  $AC, SB$ , ta có  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$  khi và chỉ khi  $SA$  bằng  $CB$  và  $SC$  bằng  $AB$ . Xét các tam giác vuông  $SAC$  và  $ACB$  ta có các đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi  $SA$  bằng  $BC$ .

Để thấy  $d(A; mp(SCB)) = AC_1$ , trong đó  $AC_1$  là đường cao của tam giác vuông  $SAC$ .

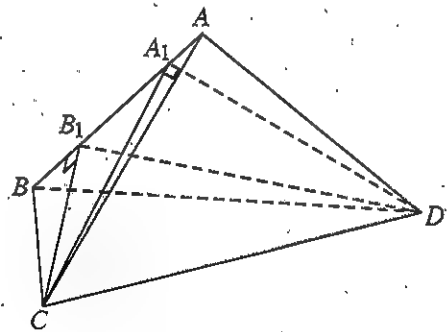
$$\text{Ta có } AC_1 = \frac{SA \cdot AC}{SC}$$

$$\text{mà } AC = \sqrt{4R^2 - h^2}, SC = 2R.$$

$$\text{Từ đó, ta có } AC_1 = \frac{h \cdot \sqrt{4R^2 - h^2}}{2R}.$$

65. a) Cách 1. (h.200)

Vì  $S_{CAB} = S_{DAB}$  nên  $CB_1 = DA_1$  ( $CB_1, DA_1$  tương ứng là đường cao của các tam giác  $CAB$  và  $DAB$ ). Từ đó  $CA_1 = DB_1$ .



Hình 200



Nếu  $A_1 \neq B_1$ .

Xét tứ diện  $A_1B_1CD$  có  $A_1C = B_1D$ ,  $CB_1 = DA_1$  nên đường vuông góc chung của  $A_1B_1$ ,  $CD$  là đường thẳng nối trung điểm của  $A_1B_1$  và  $CD$ , hay đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  đi qua trung điểm của  $CD$ .

Nếu  $A_1 = B_1$  thì kết quả là hiển nhiên.

Cách 2. (h.201)

Kẻ các đường cao  $CB_1$ ,  $DA_1$  tương ứng của các tam giác  $CAB$  và  $DAB$ . Xét mp(P) vuông góc với  $AB$ . Gọi  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  thì  $IJ \parallel (P)$ ,  $CB_1 \parallel (P)$  và  $DA_1 \parallel (P)$ .

Chiếu tứ diện đã cho lên  $(P)$  thì các điểm  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $I$  cùng có hình chiếu là  $E$ . Các điểm  $C$ ,  $J$ ,  $D$  lần lượt có hình chiếu là  $C'$ ,  $J$ ,  $D'$ . Dễ thấy  $J$  thuộc  $CD'$ ,  $EC' = CB_1$ ,  $ED' = A_1D$ , từ đó  $EC' = ED'$ .

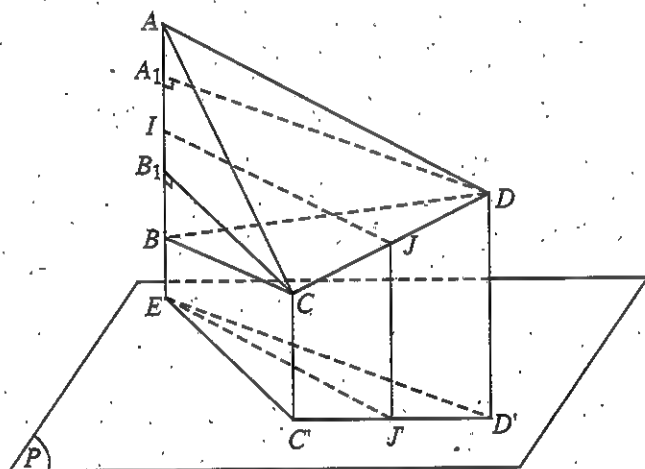
Mặt khác do  $IJ \perp AB$  và  $IJ \perp CD$  nên suy ra  $EJ \perp C'D'$ .

Như vậy  $C'ED'$  là tam giác cân tại  $E$  và nhận  $EJ$  là đường cao, từ đó  $JC' = JD'$ .

Do vậy  $JC = JD$ , tức là đường vuông góc chung của  $AB$ ,  $CD$  đi qua trung điểm của  $CD$ .

b) Vì bốn mặt của tứ diện  $ABCD$  có diện tích bằng nhau nên  $S_{CAB} = S_{DAB}$  và  $S_{BCD} = S_{ACD}$ . Do đó theo câu a) thì đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  là đường thẳng  $IJ$ , trong đó  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó  $AC = BD$ ,  $BC = AD$ .

Tương tự như trên ta có  $AC = BD$  và  $AB = CD$ . Vậy  $ABCD$  là tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau, tức là  $AB = CD$ ,  $AC = BD$ ,  $AD = BC$ .



Hình 201

66. (h.202)

a) Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  thì  $DB \perp (SAC)$ . Kẻ  $MN$  song song với  $DB$  ( $N \in AC$ ) thì  $MN \perp (SAC)$ , do đó khoảng cách từ  $M$  đến  $mp(SAC)$  bằng  $MN$ . Dễ thấy

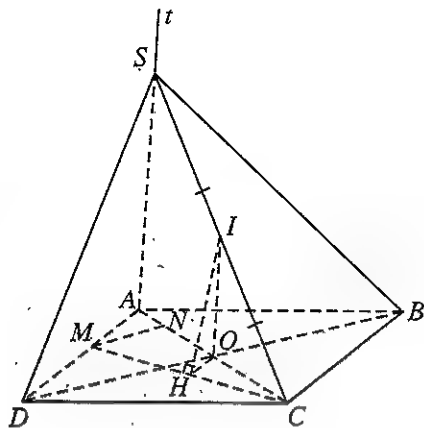
$$MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

b) Ta có  $IO \parallel SA$ ,

do  $SA \perp (ABCD)$  nên  $IO \perp (ABCD)$ .

Do  $IH \perp MC$  nên  $HO \perp HC$  (định lý

ba đường vuông góc). Vậy  $\widehat{OHC} = 90^\circ$ , tức là  $H$  thuộc đường tròn đường kính  $OC$  nằm trong mặt phẳng chứa hình vuông  $ABCD$ .



Hình 202

67. (h.203)

a) Gọi  $A_1$  là trung điểm của  $BC$  thì

$$BC \perp mp(SAA_1),$$

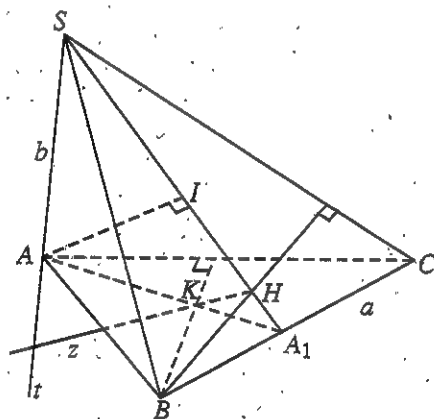
từ đó  $(SAA_1) \perp (SBC)$ .

Kẻ đường cao  $AI$  của tam giác  $SAA_1$  thì  $AI \perp (SBC)$ . Từ đó, khoảng cách từ  $A$  đến  $mp(SBC)$  bằng  $AI$ .

$$\text{Ta có } AI = \frac{AS \cdot AA_1}{SA_1} = \frac{b \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{b^2 + \frac{3a^2}{4}}}$$

$$\text{Vậy } AI = \frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}$$

b) Vì  $H$  là trực tâm tam giác  $SBC$  nên  $H$  thuộc  $SA_1$ . Do  $(SAA_1) \perp (SBC)$  và  $Hx \perp (SBC)$  nên  $Hx$  nằm trong  $mp(SAA_1)$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $Hx$  và  $AA_1$ , ta có  $KH \perp (SBC)$ ,  $BH \perp SC$  nên  $KB \perp SC$  (định lý ba đường vuông góc).



Hình 203

Mặt khác  $SA \perp (ABC)$ ,  $BK \perp SC$  nên  $BK \perp AC$  (định lý ba đường vuông góc). Như vậy  $K$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

Vậy khi  $S$  di động trên đường thẳng  $At$  vuông góc với  $mp(ABC)$  thì đường thẳng  $Hs$  đi qua điểm cố định là trực tâm  $K$  của tam giác  $ABC$ .

68. (h.204)

a) Góc giữa  $AC'$  và  $A'B$  bằng  $90^\circ$ . Vì  $AC'$  vuông góc với  $(A'BD)$  tại trọng tâm  $G$  của tam giác  $A'BD$  và  $A'BD$  là tam giác đều cạnh  $a\sqrt{2}$  nên

$$d(AC'; A'B) = GI = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

b) Đặt  $A'M = BN = DP = x$  thì

$$AN^2 = a^2 + x^2$$

$$AP^2 = a^2 + x^2$$

$$AM^2 = a^2 + x^2.$$

Suy ra  $AM = AN = AP$ .

Mặt khác

$$NP^2 = NC^2 + CD^2 + DP^2 = (a-x)^2 + a^2 + x^2;$$

$$NM^2 = NB^2 + BB'^2 + B'M^2 = x^2 + a^2 + (a-x)^2.$$

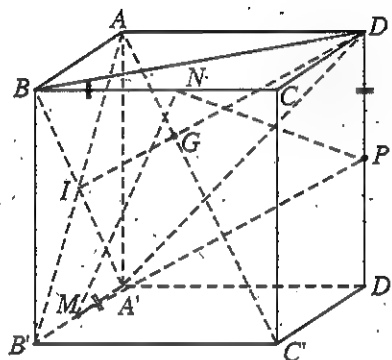
Tương tự, ta có  $MN = NP = PM$ .

Do đó  $AMNP$  là hình chóp đều. Khi ấy đường thẳng nối  $A$  với trọng tâm tam giác  $MNP$  sẽ vuông góc với  $mp(MNP)$ . Tương tự như trên ta cũng có đường thẳng nối  $C'$  với trọng tâm của tam giác  $MNP$  sẽ vuông góc với  $mp(MNP)$ . Vậy trọng tâm tam giác  $MNP$  luôn thuộc đường thẳng cố định là  $AC'$ .

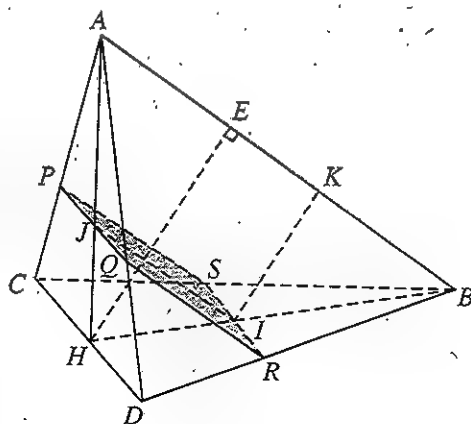
69. (h.205)

Dễ thấy thiết diện là hình bình hành  $PQRS$ . Mặt khác theo giả thiết  $CD \perp (AHB)$  nên  $CD \perp AB$ . Vậy  $PQRS$  là hình chữ nhật.

Kẻ  $HE \perp AB$  thì  $HE \perp (PQRS)$ . Kẻ  $IK \parallel HE$  thì  $IK \perp (PQRS)$ . Do  $AB \parallel (PQRS)$  và  $d(B; (PQRS)) = d$  nên  $IK = d$ .



Hình 204



Hình 205

Ta có  $HE = \frac{AH \cdot HB}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - BH^2} \cdot HB}{AB}$   
 $= \frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

Ta có  $\frac{IK}{HE} = \frac{BI}{BH} = \frac{RS}{CD}$

suy ra  $RS = \frac{da}{a\sqrt{15}} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}d}{\sqrt{15}}$ ;

$$BI = \frac{IK \cdot BH}{HE} = \frac{d \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{5}}$$

Mặt khác  $\frac{IJ}{AB} = \frac{HI}{HB} = \frac{(HB - IB)}{HB}$ ;

từ đó  $IJ = \frac{AB(HB - IB)}{HB} = \frac{\sqrt{2}(a\sqrt{15} - 4\sqrt{2}d)}{\sqrt{15}}$

Vậy  $S_{PQRS} = RS \cdot IJ = \frac{8}{15}d(a\sqrt{15} - 4\sqrt{2}d)$ .

70. (h.206)

Xét  $(P)$  là mặt phẳng chứa một đường chéo, chẳng hạn đường chéo  $BD'$  của hình lập phương.

Nếu  $(P)$  chứa  $D'A'$  thì thiết diện có diện tích là  $a^2\sqrt{2}$ .

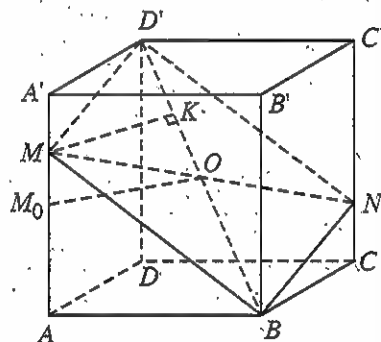
Tương tự, nếu  $(P)$  chứa  $D'C'$  hoặc  $D'D$  thì thiết diện cũng có diện tích là  $a^2\sqrt{2}$ .

Ta xét  $(P)$  cắt  $AA'$  tại điểm  $M$ . Gọi  $O$  là tâm hình lập phương thì  $MO$  cắt  $CC'$  tại  $N$ . Do đó thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi  $(P)$  là  $BMD'N$ , đó là hình bình hành.

Ta có

$$S_{BMD'N} = BD' \cdot MK = d \cdot MK$$

( $d$  là độ dài đường chéo của hình lập phương).



Hình 206

Vậy  $S_{BMD'N}$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MK$  nhỏ nhất, tức  $MK$  là đường vuông góc chung của  $BD'$  và  $AA'$ . Dễ thấy  $OM_0$  là đường vuông góc chung của  $BD'$  và  $AA'$ , trong đó  $M_0$  là trung điểm của  $AA'$ ,  $OM_0$  bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Vậy lúc đó

$$S_{BMD'N} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

*Chú ý.* Khi  $(P)$  cắt  $A'B'$  hoặc  $B'C'$  thì cách giải quyết bài toán cũng như trên và ta có diện tích thiết diện nhỏ nhất trong trường hợp đó cũng là  $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ .

Dễ thấy  $\frac{a^2\sqrt{6}}{2} < a^2\sqrt{2}$ .

Vậy nếu  $(P)$  qua đường chéo  $BD'$  và qua trung điểm một cạnh của hình lập phương không đi qua  $B$  và  $D'$ , thì diện tích thiết diện nhỏ nhất và có giá trị bằng  $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ .



### Bài tập ôn tập chương III

71. (h.207)

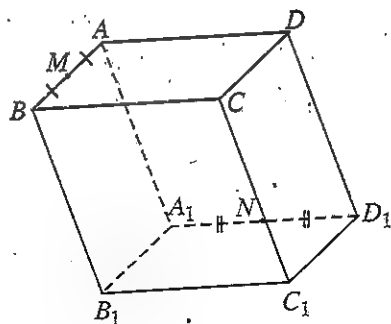
a) Đặt  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ .

$P$  là giao điểm của  $mp(CMN)$  với đường thẳng  $B_1C_1$  khi và chỉ khi  $C, M, N, P$  thuộc một mặt phẳng và  $P$  thuộc đường thẳng  $B_1C_1$ .

Ta có các điểm  $M, N, C, P$  thuộc một mặt phẳng nên tồn tại các số  $x, y, z$  sao cho

$$x + y + z = 1 \quad (*)$$

và  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}$ .



Hình 207

Ta có 
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= x \cdot \frac{\vec{b}}{2} + y \left( \vec{a} + \frac{\vec{c}}{2} \right) + z(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= y\vec{a} + \left( \frac{x}{2} + z \right) \vec{b} + \left( \frac{y}{2} + z \right) \vec{c}.\end{aligned}\quad (1)$$

Vì  $P$  thuộc đường thẳng  $B_1C_1$  nên  $\overrightarrow{B_1P} = t\overrightarrow{B_1C_1}$ ,

từ đó 
$$\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \vec{a} + t\vec{c}.\quad (2)$$

Từ (1), (2) và do  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng nên

$$\begin{cases} y = 1 \\ \frac{x}{2} + z = 1 \\ \frac{y}{2} + z = t \end{cases} \quad (**)$$

Kết hợp (\*) và (\*\*), ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 1 \\ \frac{x}{2} + z = 1 \\ \frac{y}{2} + z = t \\ x + y + z = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow z = -x &\Rightarrow \frac{x}{2} - x = 1 \Leftrightarrow x = -2 \\ \Rightarrow z = 2, t &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Vậy giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng  $B_1C_1$  là điểm  $P$  xác định bởi

$$\overrightarrow{B_1P} = \frac{5}{2} \overrightarrow{B_1C_1}.$$

Tương tự như trên, nếu gọi  $Q$  là giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng  $B_1D$  thì ta có  $x + y + z = 1$

và 
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC} \\ &= y\vec{a} + \left( \frac{x}{2} + z \right) \vec{b} + \left( \frac{y}{2} + z \right) \vec{c}.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \vec{b} + \vec{a} + t\overrightarrow{B_1D} = \vec{a} + \vec{b} + t(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= (1-t)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}.\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y = 1-t \\ \frac{x}{2} + z = 1-t \\ \frac{y}{2} + z = t \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - y + z = 0 \\ x+y+z=1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1-z = 2-4z \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{9}, y = \frac{4}{9}, t = \frac{5}{9}.$$

Vậy giao điểm  $Q$  của đường thẳng  $B_1D$  với mp(CMN) được xác định bởi

$$\overrightarrow{B_1Q} = \frac{5}{9}\overrightarrow{B_1D}.$$

b) Từ kết quả câu a), ta có

$$\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{5}{9}\vec{c}.$$

72. (h.208)

Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ .

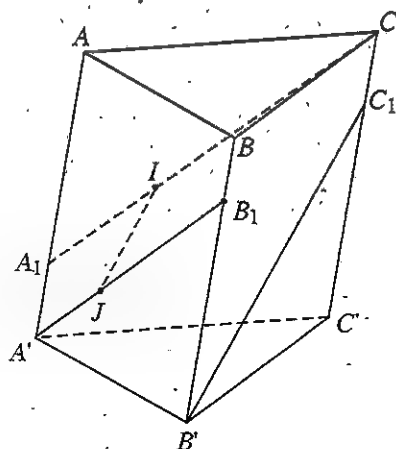
Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4}\vec{a}, \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a}, \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4}\vec{a}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA_1} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{c};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B_1} &= \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{B'B_1} \\ &= -\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b};\end{aligned}$$



Hình 208

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C_1} &= \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C_1} \\ &= -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$

Vì  $I$  thuộc  $CA_1$  nên  $\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CA_1} = \frac{3}{4}t\vec{a} - t\vec{c}$ .

Do  $J$  thuộc  $A'B_1$  nên  $\overrightarrow{A'J} = m\overrightarrow{A'B_1} = -\frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$ .

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác } \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'J} \\ &= -\frac{3}{4}t\vec{a} + t\vec{c} + \vec{a} - \vec{c} - \frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b} \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m\right)\vec{a} + m\vec{b} + (t-1)\vec{c}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có } IJ // B'C_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{B'C_1} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m = -\frac{3}{4}k \\ m = -k \\ t - 1 = k. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } 1 - \frac{3}{4}(k+1) + \frac{3}{4}k &= -\frac{3}{4}k \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4}k &= 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow t = \frac{2}{3}, m &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Vậy điểm  $I$  thuộc  $A_1C$  được xác định bởi  $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA_1}$ .

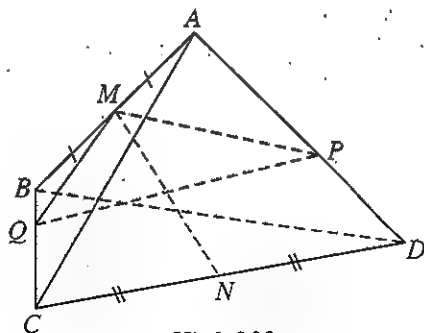
và  $J$  thuộc  $A'B_1$  được xác định bởi  $\overrightarrow{A'J} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B_1}$ .

Khi đó, ta có  $\frac{IJ}{B'C_1} = \frac{1}{3}$ .

73. (h.209)

$MN$  cắt  $PQ$  nên các điểm  $M, N, P, Q$  cùng thuộc một mặt phẳng. Điều này tương đương với có các số  $x, y$  sao cho

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}.$$



Hình 209



$$\text{Đặt } \overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1 - k} \\ &= \frac{1}{1 - k} \left[ \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{k}{2}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{a}) \right] \\ &= \frac{1}{1 - k} \left[ \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2(1 - k)} [(1 + k)\vec{a} + (k - 1)\vec{b}] \\ &= \frac{k + 1}{2(1 - k)} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + t(-\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta có } \overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k + 1}{2(1 - k)} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + y\left(\frac{1}{2} - t\right) \\ 0 = \frac{1}{2}x + yt. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1, x = \frac{k + 1}{k - 1} + 1 = \frac{2k}{k - 1}$$

$$t = \frac{k}{k - 1}.$$

Như vậy 
$$\overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k-1} \overrightarrow{BC} = \frac{k}{k-1} (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC})$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{k}{k-1}\right) \overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k-1} \overrightarrow{QC}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{BQ} = k \overrightarrow{QC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{QB}{QC} = |k|.$$

74. Cách 1. (h.210) Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,

$\overrightarrow{DC} = \vec{c}$  thì  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  không đồng phẳng.

Các điểm  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi có các số  $m$ ,  $n$  để

$$\overrightarrow{D_1B_1} = m\overrightarrow{D_1A_1} + n\overrightarrow{D_1C_1}. \quad (1)$$

Từ hệ thức  $\overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}$ , ta có

$$\overrightarrow{D_1B_1} = \frac{\overrightarrow{D_1B} - k\overrightarrow{D_1C}}{1-k}$$

hay 
$$\overrightarrow{D_1B_1} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DB} - k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC})}{1-k} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k} \vec{b} - \frac{k}{1-k} \vec{c}.$$

Mặt khác  $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A} = k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DA}) \Rightarrow \overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k} \vec{a}.$

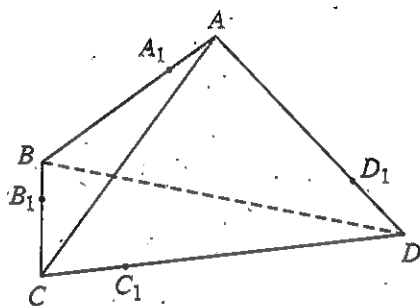
Vậy 
$$\overrightarrow{D_1B_1} = \frac{k}{1-k} \vec{a} + \frac{1}{1-k} \vec{b} - \frac{k}{1-k} \vec{c}. \quad (2)$$

Tương tự như trên, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_1A_1} &= \frac{\overrightarrow{D_1A} - k\overrightarrow{D_1B}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DA} - k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DB})}{1-k} \\ &= \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k} \vec{a} - \frac{k}{1-k} \vec{b} \end{aligned}$$

hay 
$$\overrightarrow{D_1A_1} = \frac{k+1}{1-k} \vec{a} - \frac{k}{1-k} \vec{b} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{D_1C_1} = \frac{\overrightarrow{D_1C} - k\overrightarrow{D_1D}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC} - k\overrightarrow{D_1D}}{1-k} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k} \vec{c}$$



Hình 210

$$\text{do đó } \overrightarrow{D_1C_1} = \frac{k}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{c}. \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc mặt phẳng khi và chỉ khi

$$k\vec{a} + \vec{b} - k\vec{c} = (mk + nk + m)\vec{a} - mk\vec{b} + n\vec{c}.$$

Do  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi có các số  $m, n$  để

$$\begin{cases} k = mk + nk + m \\ 1 = -mk \\ -k = n. \end{cases}$$

Điều đó tương đương với  $k = -1 - k^2 - \frac{1}{k}$  hay  $k^3 + k^2 + k + 1 = 0$  hay  $k = -1$ .

Vậy với  $k = -1$  thì các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng.

*Cách 2.* Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ . Tìm  $k$  để các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng tương đương với việc tìm  $k$  để có biểu diễn

$$\overrightarrow{DA_1} = x\overrightarrow{DB_1} + y\overrightarrow{DC_1} + z\overrightarrow{DD_1}, \text{ với } x + y + z = 1. \quad (a)$$

Từ hệ thức  $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$  ta có

$$\overrightarrow{DA_1} = \frac{\overrightarrow{DA} - k\overrightarrow{DB}}{1-k} = \frac{1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b}. \quad (1)$$

Tương tự như trên, ta cũng có

$$\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}. \quad (2)$$

Mặt khác từ  $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$  ta có

$$\overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{C_1D} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC_1} = \frac{1}{1-k}\vec{c}. \quad (3)$$

Tương tự từ  $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$ , ta cũng có

$$\overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k}\vec{a}. \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4), ta suy ra

$$\overrightarrow{DA_1} = -\frac{1}{k}\overrightarrow{DD_1} - k\overrightarrow{DB_1} - k^2\overrightarrow{DC_1}. \quad (b)$$

Từ (a) và (b) ta có các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi

$$-\frac{1}{k} - k - k^2 = 1 \Leftrightarrow k^3 + k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy với  $k = -1$  thì các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng thuộc một mặt phẳng.

75. a) *Cách 1.* Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $AC = BD$ . Vậy  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Cách 2. } MA^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 \\ &= 2(MO^2 + OA^2) \text{ (do } OA = OC, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Tương tự như trên, ta có  $MB^2 + MD^2 = 2(MO^2 + OB^2)$ .

Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $OA = OB$ .

$$\text{Vậy } MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

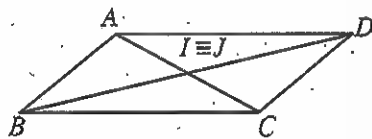
b) Gọi  $I, J$  lần lượt trung điểm của  $AC$  và  $BD$ , khi đó :

$$\begin{aligned} MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})^2 \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IC^2 - 2MJ^2 - JB^2 - JD^2 \\ &= 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2). \end{aligned}$$

• Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $I \equiv J$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 &= \\ &= \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2) \end{aligned}$$



Hình 211

tức là  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$ .

• Ngược lại, nếu  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$  thì  $MI^2 - MJ^2$  cũng là hằng số. Khi đó chọn  $M$  lần lượt là điểm  $I$  và điểm  $J$  thì  $II^2 - IJ^2 = JI^2 - JJ^2$ , suy ra  $-IJ^2 = IJ^2$ , tức là  $IJ = 0$  hay  $I \equiv J$ .

Vậy  $ABCD$  là hình bình hành (h.211).

Chú ý. Cũng có thể sử dụng các công thức

$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{BD^2}{2}$$

và từ đó ta có  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$

rồi lí luận như trên để đi đến kết quả.

76. (h.212)

a)  $AO$  và  $DC$  song song và bằng nhau nên  $AD = OC$  mà  $AD = AO$ , từ đó  $OA = OC$ .

Tương tự, ta có  $OB = OD$ .

Do đó  $OA = OB = OC = OD$ .

Mặt khác  $SO$  vuông góc với mp( $ABCD$ ) nên mọi điểm trên  $SO$  cách đều các điểm  $A, B, C, D$ . Vì  $SA$  và  $SO$  cắt nhau nên xét đường trung trực của  $SA$  trong mp( $SAB$ ), thì nó cắt đường thẳng  $SO$  tại một điểm, đó là điểm cách đều năm đỉnh  $S, A, B, C, D$ . Vì  $SO = a$ ,  $AO = a$  nên  $OS = OA$ .

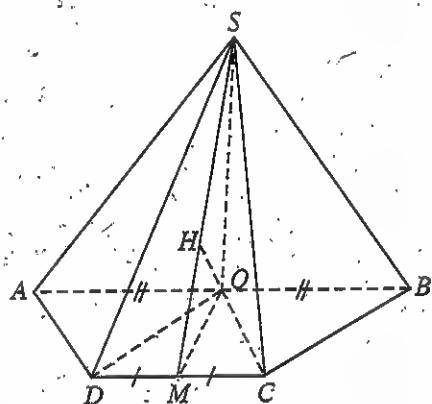
Vậy  $O$  là điểm cách đều các điểm  $S, A, B, C, D$ . Do đó, khoảng cách từ điểm cách đều phải tìm đến các đỉnh bằng  $a$ .

b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$  thì  $OM \perp DC$   
từ đó  $CD \perp \text{mp}(OMS)$ .

Vậy nếu kẻ  $OH$  vuông góc với  $SM$  thì  $DC \perp OH$ ,

từ đó  $OH \perp \text{mp}(SCD)$ .

Như thế  $\widehat{HSO}$  là góc giữa  $SO$  và mp( $SCD$ ).



Hình 212

Nhận thấy  $\widehat{HSO} = \widehat{MSO}$ .

Cách 1. Xét tam giác  $SOM$  vuông tại  $O$  ta có

$$\tan \widehat{HSO} = \tan \widehat{MOS} = \frac{OM}{OS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}. \end{aligned}$$

Vậy

$$OH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó

$$\sin \widehat{HSO} = \frac{OH}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy góc giữa  $SO$  và mặt phẳng  $(SCD)$  là  $\alpha$  mà

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

77. (h.213)

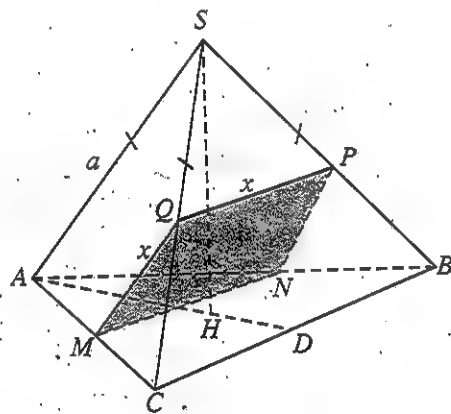
Giả sử  $H$  là tâm của tam giác đều. Từ  $SA = SB = SC$  nên  $SH \perp (ABC)$  và  $\widehat{SAH} = 60^\circ$ .

Giả sử mặt phẳng song song với  $SA$ ,  $CD$  và thiết diện thu được là hình vuông  $MNPQ$ .

Khi đó, nếu kí hiệu cạnh hình vuông là  $x$  thì

$$\frac{x}{SA} = \frac{CQ}{CS} \quad (1)$$

$$\frac{x}{BC} = \frac{SQ}{SC} \quad (2)$$



Hình 213

Từ (1), (2) suy ra

$$x \left( \frac{1}{SA} + \frac{1}{BC} \right) = \frac{CQ + QS}{CS} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{SA \cdot BC}{SA + BC} = \frac{a \cdot BC}{a + BC}$$

Mặt khác  $HA = SA \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$

mà  $HA = \frac{BC \sqrt{3}}{3}$

Suy ra  $BC = \frac{a \sqrt{3}}{2}$

Từ đó  $x = \frac{a \cdot \frac{a \sqrt{3}}{2}}{a + \frac{a \sqrt{3}}{2}} = \frac{a \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = a \sqrt{3} (2 - \sqrt{3})$

Vậy  $S_{MNPQ} = [a \sqrt{3} (2 - \sqrt{3})]^2 = 3a^2 (2 - \sqrt{3})^2$

78. (h.214)

a) Dễ thấy  $BC = \frac{10a}{\sqrt{3}}$

$$SA^2 = SO^2 + AO^2$$

$$= 4a^2 + a^2 = 5a^2$$

$$SC^2 = SO^2 + OH^2 + HC^2$$

$$= 4a^2 + 16a^2 + \frac{25a^2}{3}$$

$$= \frac{85a^2}{3}$$

$$AC^2 = \frac{100a^2}{3}$$

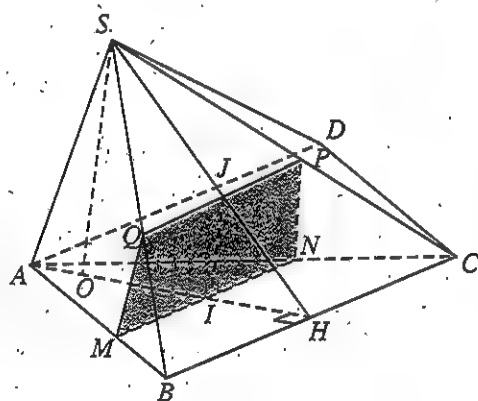
Ta có

$$SA^2 + SC^2 = AC^2$$

Vậy  $SA \perp SC$

+ Kẻ  $AD$  song song và bằng  $BC$  (hai tia  $AD, BC$  cùng chiều) thì góc giữa  $AB$  và  $SC$  chính là góc giữa  $CD$  và  $SC$ , đó là  $\widehat{SCD}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{SCD}$ .

Dễ thấy  $SA \perp BC$ , do  $AD \parallel BC$  nên  $SA \perp AD$ , tức là tam giác  $SAD$  vuông.



Hình 214





vuông góc với  $A'C$ , tức là giao tuyến đó vuông góc với  $AC$ , giao tuyến này cắt  $BC$  tại  $I$ . Khi đó  $IC_1$  cắt  $BB'$  tại  $B_1$ . Thiết diện là tam giác  $AB_1C_1$ .

b) Tính diện tích thiết diện

Để thấy  $\varphi = \widehat{CAC_1}$  là góc giữa  $(P)$  và  $(ABC)$ , ngoài ra  $\widehat{C_1AC} = \widehat{AA'C}$ ,

$$\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2}}.$$

Ta có  $S_{ABC} = S_{AB_1C_1} \cos \varphi$

$$\Rightarrow S_{AB_1C_1} = \frac{S_{ABC}}{\cos \varphi} = \frac{ac}{2h} \sqrt{a^2 + c^2 + h^2}.$$

Chú ý. Có thể tính  $S_{AB_1C_1}$  bằng cách tính  $AC_1$  và đường cao  $B_1H$  của tam giác đó. Để thấy  $B_1H$  song song với  $BK$ , trong đó  $BK \perp AC$  vì  $B_1H$  và  $BK$  cùng vuông góc với  $(ACC'A')$ .

$$\text{Ngoài ra } B_1H = BK = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\triangle AA'C \sim \triangle ACC_1 \Rightarrow AC_1 = \frac{A'C \cdot AC}{AA'} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}}{h}.$$

Từ đó, tính được diện tích tam giác  $AB_1C_1$ .

80. (h.216)

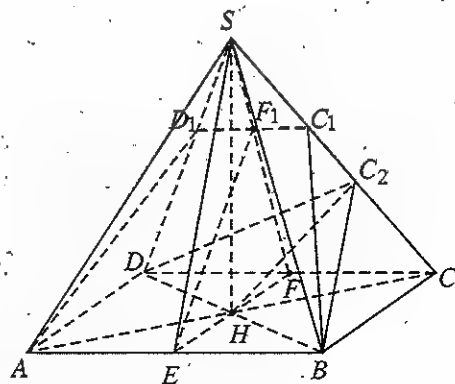
a) • Gọi  $E$  là trung điểm của  $AB$  và  $H$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Khi ấy  $SHE$  là tam giác vuông tại  $H$  và  $AB \perp (SHE)$ . Vậy góc giữa mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng đáy  $(ABCD)$  là  $\widehat{SEH}$ .

$$\text{Đặt } \widehat{SEH} = \alpha \text{ thì } \tan \alpha = \frac{2h}{a} \text{ (} SH = h \text{)}.$$

Tương tự như trên ta có góc giữa các mặt phẳng chứa mỗi mặt bên còn lại của hình chóp với mặt phẳng đáy  $(ABCD)$

$$\text{cũng bằng } \alpha \text{ và } \tan \alpha = \frac{2h}{a}.$$

• Khi  $h = a$  thì góc tạo bởi mỗi mặt phẳng chứa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng  $\alpha$  và  $\tan \alpha = 2$ .



Hình 216

Kẻ  $HC_2 \perp SC$  thì ta có  $\text{mp}(BC_2D) \perp SC$ .

Vậy góc giữa  $\text{mp}(SBC)$  và  $\text{mp}(SDC)$  bằng  $\widehat{BC_2D}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{BC_2D}$ .

Ta tính  $\widehat{BC_2D}$ .

$$\begin{aligned} \text{Để thấy} \quad HC_2 &= \frac{HC \cdot HS}{SC} \\ &= \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó} \quad BC_2^2 &= HB^2 + HC_2^2 \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3} = \frac{5a^2}{6} \end{aligned}$$

Đặt  $\beta = \widehat{BC_2D}$  thì

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC_2^2 + DC_2^2 - 2BC_2 \cdot DC_2 \cos \beta \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= \frac{5a^2}{6} + \frac{5a^2}{6} - 2 \cdot \frac{5a^2}{6} \cos \beta = 2 \cdot \frac{5a^2}{6} (1 - \cos \beta) \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{5}{6} (1 - \cos \beta) \Rightarrow \cos \beta = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Vậy góc giữa  $\text{mp}(SBC)$  và  $\text{mp}(SCD)$  là  $180^\circ - \beta$  mà  $\cos \beta = -\frac{1}{5}$ .

Tương tự như trên, ta có góc giữa hai mặt chứa hai mặt bên liên tiếp cũng được xác định bởi  $\beta$  mà  $\cos \beta = -\frac{1}{5}$ .

b) Vì  $(P)$  đi qua  $A$  và song song với  $CD$  nên  $(P)$  chứa cạnh  $AB$ . Do  $(P)$  vuông góc với  $(SCD)$  nên  $(P)$  chứa  $EF_1$  vuông góc với mặt phẳng  $(SCD)$ . Để thấy  $F_1$  thuộc  $SF$ , trong đó  $F$  là trung điểm của  $CD$ .

Mặt khác  $(P)$  chia tam giác  $SCD$  thành hai phần mà tỉ số diện tích hai phần bằng  $\frac{1}{8}$  nên  $\frac{SF_1}{SF} = \frac{1}{3}$ .

Khi ấy thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi  $(P)$  là hình thang cân  $ABC_1D_1$  mà  $C_1D_1 = \frac{1}{3} CD = \frac{a}{3}$  với đường cao  $EF_1$ .

Ta có 
$$S_{ABC_1D_1} = \frac{1}{2}(AB + C_1D_1) \cdot EF_1$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{3}\right)EF_1 = \frac{2a}{3} \cdot EF_1.$$

Ta tính  $EF_1$  (h.217)

Vì  $SH_1 \cdot SH = SF_1 \cdot SF = \frac{1}{3}SF^2$

nên 
$$\frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SF^2}{SH^2}.$$

Mặt khác  $HE = HF$ ,  $SF_1 = \frac{1}{2}F_1F$

nên dễ thấy 
$$\frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{2},$$

từ đó 
$$\frac{SH^2}{SF^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SH}{SF} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ta lại có 
$$\frac{SH}{SF} = \sin \widehat{SFH} = \frac{EF_1}{EF} = \frac{EF_1}{a}.$$

Vậy  $EF_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Từ đó  $S_{ABC_1D_1} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{6}}{9}.$

81. (h.218)

a) Vì  $(P) \perp (Q)$ ,  $(P) \cap (Q) = AB$ ,  
 $M \in (P)$ ,  $MA \perp AB$  nên  $MA \perp (Q)$ . Do  
đó  $MAB$ ,  $MAN$  là các tam giác  
vuông tại A.

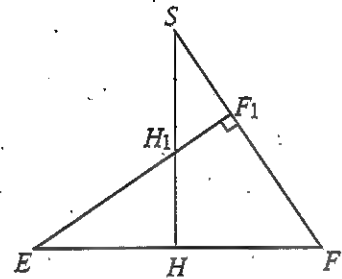
Tương tự như trên, các tam giác  
 $MBN$ ,  $ABN$  vuông tại B.

b) Vì  $MN^2 = MA^2 + AB^2 + BN^2$   

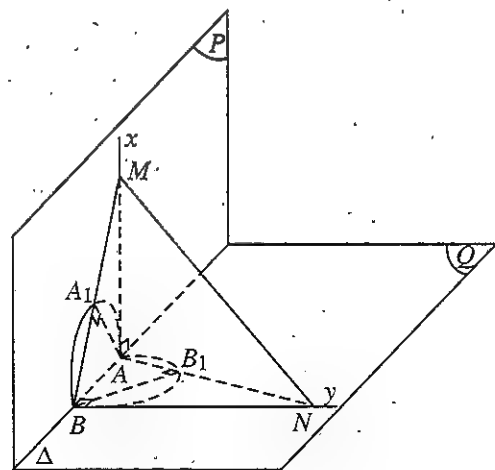
$$= m^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{m^2}.$$

Từ đó  $MN$  có độ dài bé nhất khi

và chỉ khi  $m^2 + \frac{a^4}{m^2}$  bé nhất.



Hình 217



Hình 218

Mặt khác  $m^2 \cdot \frac{a^4}{m^2} = a^4$ .

Vậy  $MN$  có độ dài bé nhất khi và chỉ khi

$$m^2 = \frac{a^4}{m^2} \Leftrightarrow m = a.$$

c). Vì  $(MAB) \perp (NMB)$  nên khi kẻ  $AA_1$  vuông góc với  $BM$  tại  $A_1$  thì  $AA_1 \perp (BMN)$ , tức  $A_1$  là chân đường cao của tứ diện  $ABMN$  kẻ từ đỉnh  $A$ .

Như vậy  $A_1$  thuộc  $(P)$  và  $\widehat{BA_1A} = 90^\circ$ , từ đó  $A_1$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$  trong  $(P)$ . Đường tròn này cố định.

Tương tự như trên, chân đường cao  $B_1$  kẻ từ đỉnh  $B$  của tứ diện  $ABMN$  cũng thuộc đường tròn đường kính  $AB$  nằm trong mặt phẳng  $(Q)$ .

82. (h.219)

a) Kẻ  $MH \perp AD$  thì

$$MH \perp (ABCD) \text{ và } MH = \frac{x\sqrt{2}}{2} = AH.$$

Kẻ  $NK \perp AD$  thì

$$NK = \frac{x\sqrt{2}}{2} = DK.$$

$$\text{Vậy } KH = |a - x\sqrt{2}|.$$

Ta có

$$MN^2 = MH^2 + HK^2 + KN^2 = 3x^2 - 2a\sqrt{2}x + a^2.$$

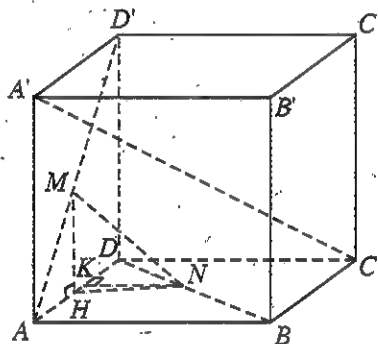
Từ đó  $MN$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

b) Khi  $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$  thì

$$MN^2 = \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{3};$$

$$AM^2 = \frac{2a^2}{9};$$

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 - 2AD \cdot DN \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{9}.$$



Hình 219

Từ đó  $AN^2 = AM^2 + MN^2$  hay  $MN \perp AD'$ .

Chứng minh tương tự như trên, ta cũng có  $MN \perp BD$ .

Vậy  $MN$  là đường vuông góc chung của  $AD'$  và  $BD$ .

Khi  $DN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$  thì

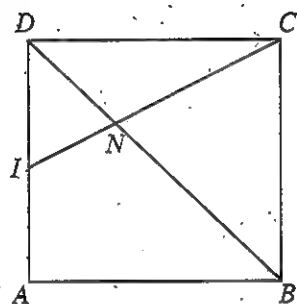
$$NB = 2ND.$$

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$  thì ta có  $I, N, C$  thẳng hàng (h.220). Tương tự ta cũng có các điểm  $I, M, A'$  thẳng hàng.

Xét tam giác  $A'IC$  ta có

$$\frac{IN}{NC} = \frac{IM}{MA'} = \frac{1}{2}.$$

Vậy  $MN \parallel A'C$ .



Hình 220

83. (h.221)

a) Cách 1.

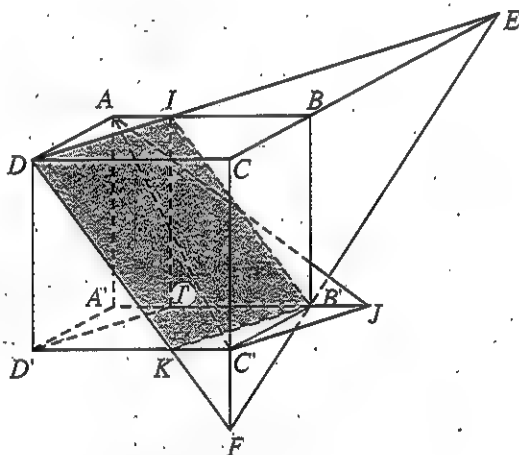
Đặt  $\alpha$  là góc giữa  $DI$  và  $AC'$  thì

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{DI}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} \\ &= \frac{(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'})}{|\overrightarrow{DI}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} \\ &= \frac{|-a^2 + xa|}{\sqrt{a^2 + x^2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{|-a + x|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}}. \end{aligned}$$

Khi ấy  $\alpha = 60^\circ$  khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \frac{|-a + x|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8ax + a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x &= a(4 - \sqrt{15}) \text{ (vì } 0 < x < a). \end{aligned}$$

Hệ thức trên xác định vị trí điểm  $I$ .



Hình 221

Cách 2.

Kẻ  $II' \parallel AA'$  ( $I' \in A'B'$ ),  $C'J \parallel D'I$  ( $I'$  thuộc đường thẳng  $A'B'$ ) thì  $\widehat{AC'J}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{AC'J}$  là góc giữa hai đường thẳng  $AC'$  và  $DI$  với  $B'J = x$ .

Do giả thiết góc giữa hai đường thẳng  $AC'$  và  $DI$  bằng  $60^\circ$  nên  $\widehat{AC'J} = 60^\circ$  hoặc  $120^\circ$ .

Ta có 
$$AJ^2 = AA'^2 + A'J^2 = a^2 + (a+x)^2$$
$$AC'^2 = 3a^2, C'J^2 = a^2 + x^2.$$

– Trường hợp  $\widehat{AC'J} = 60^\circ$ , ta có

$$AJ^2 = AC'^2 + C'J^2 - 2AC' \cdot C'J \cdot \frac{1}{2}$$

hay 
$$a^2 + (a+x)^2 = 3a^2 + a^2 + x^2 - 2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = (4 - \sqrt{15})a \text{ (vì } 0 < x < a).$$

– Trường hợp  $\widehat{AC'J} = 120^\circ$ , ta có

$$a^2 + (a+x)^2 = 3a^2 + a^2 + x^2 + 2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2ax = 2a^2 + a\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-a) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}$$

Điều này không xảy ra vì  $0 < x < a$ .

Vậy khi  $x = (4 - \sqrt{15})a$  thì góc giữa  $DI$  và  $AC'$  bằng  $60^\circ$ .

b) Gọi  $E = DI \cap CB$

$$F = B'E \cap CC'$$

$$K = DF \cap D'C'$$

thì thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mp( $B'DI$ ) là tứ giác  $DIB'K$ .  
Để thấy đó là hình bình hành.

$$S_{DIB'K} = 2S_{B'ID} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\overline{IB'}^2 \cdot \overline{ID}^2 - (\overline{IB'} \cdot \overline{ID})^2}.$$

Mặt khác  $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IB} = (a^2 + x^2)[a^2 + (a-x)^2]$

và  $(\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IB})^2 = [(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BB'})]^2$   
 $= (\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB})^2 = [-x(a-x)]^2 = x^2(a-x)^2.$

Từ đó  $S_{DIBK} = \sqrt{a^4 + a^2x^2 + a^2(a-x)^2}$   
 $= a\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}.$

Để thấy  $S_{DIBK}$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $x = \frac{a}{2}.$

c) Gọi  $h$  là khoảng cách từ  $C$  đến mp( $B'ID$ ), do tứ diện  $CDEF$  có  $CD, CE, CF$  đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2}.$$

Mặt khác do  $AD \parallel BE$  nên  $\frac{a}{BE} = \frac{x}{a-x},$

từ đó  $BE = \frac{a(a-x)}{x}$

và  $CE = a + \frac{a(a-x)}{x} = \frac{a^2}{x}.$

Tương tự như trên, ta có  $CF = \frac{ax}{a-x},$  từ đó

$$CF = a + \frac{ax}{a-x} = \frac{a^2}{a-x}.$$

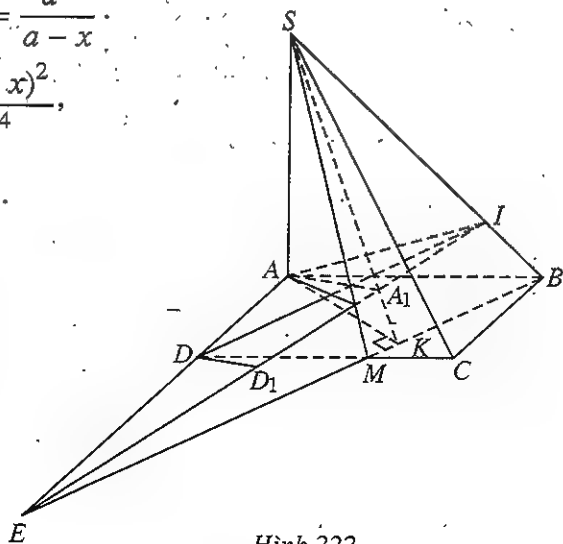
Như vậy  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{(a-x)^2}{a^4},$

do vậy  $h = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}}.$

84. (h.222)

a) Kẻ  $AK \perp MB$ , do  $SA \perp (ABC)$  nên  $SK \perp MB$  (định lí ba đường vuông góc).

Vậy  $S_{SBM} = \frac{1}{2} BM \cdot SK.$



Hình 222

Mặt khác  $BM = \sqrt{b^2 + x^2}$  và  $AK \cdot MB = 2S_{AMB} = ab$

tức là  $AK = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + x^2}}$

Từ đó 
$$SK^2 = SA^2 + AK^2 = h^2 + \frac{a^2 b^2}{b^2 + x^2}$$
$$= \frac{a^2 b^2 + b^2 h^2 + h^2 x^2}{b^2 + x^2}$$

Vậy  $S_{SBM} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 h^2 + h^2 x^2}$

b) Với  $A_1$  là hình chiếu của  $A$  trên  $SK$ , dễ thấy  $AA_1 \perp (SBM)$ .

Từ đó  $AA_1 \cdot SK = SA \cdot AK$ ,

suy ra  $AA_1 = \frac{SA \cdot AK}{SK}$

hay 
$$AA_1 = \frac{h \cdot \frac{ab}{\sqrt{b^2 + x^2}}}{\frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 h^2 + h^2 x^2}}{\sqrt{b^2 + x^2}}} = \frac{abh}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 h^2 + h^2 x^2}}$$

Khi  $M$  là trung điểm  $DC$  thì  $x = \frac{a}{2}$  nên

$$AA_1 = \frac{2abh}{\sqrt{4a^2 b^2 + 4b^2 h^2 + a^2 h^2}}$$

c) Vì  $AA_1 \perp (SMB)$  nên  $AA_1 \perp SB$ , mặt khác  $AD \perp SB$ , từ đó  $mp(ADA_1) \perp SB$ .

Gọi giao điểm của  $SB$  với  $mp(ADA_1)$  là  $I$  thì  $AI \perp SB$ , từ đó  $I$  là điểm cố định và  $mp(ADA_1)$  cố định.

Như vậy, điểm  $A_1$  nhìn  $AI$  cố định dưới góc vuông và  $A_1$  thuộc mặt phẳng cố định  $(ADI)$ , tức là  $A_1$  thuộc đường tròn đường kính  $AI$  trong  $mp(ADI)$ .

Bán kính của đường tròn đó bằng  $\frac{AI}{2}$  mà

$$AI \cdot SB = SA \cdot AB$$





Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  ta có  $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , như vậy, điểm  $S$  thuộc đường tròn tâm  $I$ , bán kính  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  trong mặt phẳng  $(\alpha)$  nói trên, tức là điểm  $S$  thuộc đường tròn cố định.

b) Ta có  $SH \leq SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Như vậy giá trị lớn nhất của  $SH$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  khi  $H$  trùng với điểm  $I$ .

Do  $SI \subset (SAB)$  và  $I \equiv H$ ,  $SH \perp (ABC)$  nên  $(SAB) \perp (ABC)$  khi  $SH$  đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó 
$$SC^2 = CI^2 + SI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + CI^2.$$

Mặt khác 
$$\begin{aligned} CI^2 &= CA^2 + AI^2 - 2AC \cdot AI \cdot \cos 120^\circ \\ &= a^2 + \frac{a^2}{4} + 2a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó 
$$SC^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{7a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$$

hay 
$$SC = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

c) – Khi  $SBC$  là tam giác vuông tại điểm  $S$  thì hình chiếu của điểm  $A$  trên  $mp(SBC)$  là trung điểm  $K$  của  $BC$ .

Thật vậy, ta có  $AS = AC = AB$  nên  $KS = KC = KB$ .

Do đó,  $AK$  là khoảng cách từ điểm  $A$  đến  $mp(SBC)$ .

Dễ thấy  $AK = AC \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$ .

– Vì  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $SB = a$  nên  $SC = a\sqrt{2}$ .

Mặt khác  $SA = AC = a$  nên  $SC^2 = AS^2 + AC^2$ , tức là  $\widehat{SAC} = 90^\circ$ .

Như vậy, góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $AC$  bằng  $90^\circ$ .

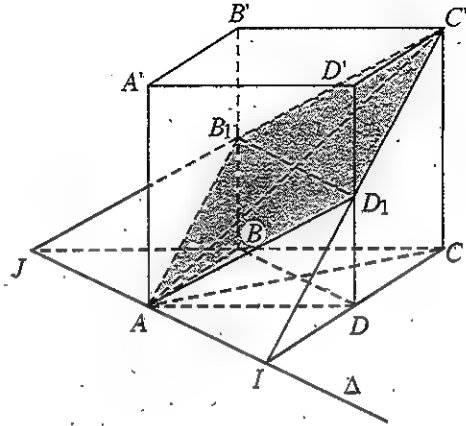
86. (h.224)

a) Gọi  $I = CD \cap \Delta$ ,  $J = BC \cap \Delta$ ,  
 $B_1 = C'J \cap BB'$ ,  $D_1 = C'I \cap DD'$  thì  
 thiết diện thu được là  $AB_1C'D_1$ .

Để thấy  $AB_1C'D_1$  là hình bình hành  
 và  $B_1, D_1$  lần lượt là trung điểm của  
 $BB', DD'$ .

Từ đó  $AD_1 = D_1C'$ .

Do đó thiết diện  $AB_1C'D_1$  là hình thoi.



Hình 224

$$S_{AB_1C'D_1} = \frac{1}{2} B_1D_1 \cdot AC',$$

$$B_1D_1 = BD = a\sqrt{2},$$

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 2a^2 + 6a^2 = 8a^2 \Rightarrow AC' = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{AB_1C'D_1} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^2.$$

b) Ta có  $AC \perp BD$  mà  $\Delta \parallel BD$  nên  $AC \perp \Delta$ .

Mặt khác  $C'C \perp (ABCD)$  nên  $AC' \perp \Delta$  (định lí ba đường vuông góc).

Vậy  $\widehat{C'AC}$  là góc giữa mp(P) và mp(ABCD).

$$\text{Ta có } \tan \widehat{C'AC} = \frac{CC'}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}, \text{ từ đó } \widehat{C'AC} = 60^\circ.$$

Chú ý. Cũng có thể tính góc giữa mp(P) và mp(ABCD) bởi công thức

$$S_{ABCD} = S_{AB_1C'D_1} \cos \varphi$$

$$\text{mà } S_{ABCD} = a^2, S_{AB_1C'D_1} = 2a^2;$$

$$\text{tức là } \cos \varphi = \frac{1}{2} \text{ hay } \varphi = 60^\circ.$$

87. (h.225)

a) Vì  $BC \parallel (SAD)$

$$M \in mp(SAD) \cap mp(MBC)$$

$$\text{nên } mp(MBC) \cap (SAD) = MN$$

$$\text{mà } MN \parallel BC \ (N \in SD).$$

Như vậy  $BMNC$  là hình thang.

$$\text{Mặt khác } BC \perp (SAB) \text{ nên } BC \perp BM.$$

Vậy  $BMNC$  là hình thang vuông.

Do đó thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $mp(MBC)$  nói chung là hình thang vuông.

Khi  $x = 0$  thì thiết diện là hình chữ nhật  $ABCD$ , và khi  $x = 2a$  thì thiết diện là tam giác  $SBC$ .

$$\text{Ta có } S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BC + MN) \cdot BM$$

$$BM^2 = a^2 + x^2 \text{ hay } BM = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a - x}{2a}, \text{ từ đó } MN = b \cdot \frac{2a - x}{2a}.$$

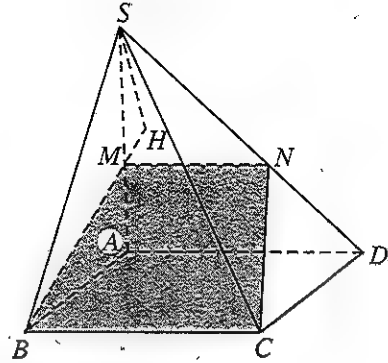
$$\text{Từ đó } S_{BMNC} = \frac{1}{2} \left( b + b \cdot \frac{2a - x}{2a} \right) \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{b}{4a} (4a - x) \sqrt{a^2 + x^2}.$$

b) Do  $(BMNC) \perp (SAB)$  nên khi kẻ  $SH$  vuông góc với đường thẳng  $BM$  ( $H \in BM$ ) thì  $SH \perp (BMNC)$ .

Khoảng cách từ  $S$  đến  $mp(BCM)$  là  $SH$ . Dễ thấy

$$SH \cdot BM = 2S_{SBM} = 2 \cdot \frac{1}{2} a(2a - x).$$

$$\text{Vậy } SH = \frac{a(2a - x)}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$



Hình 225

88. (h.226)

a) Gọi  $S$  là đỉnh của hình chóp đều sinh ra hình chóp cắt đều  $A'B'C'.ABC$ ; các điểm  $H, H'$  lần lượt là tâm hai đáy của hình chóp cắt đều;  $I$  là trung điểm của  $BC'$ . Dễ thấy  $\widehat{HSI} = \alpha$ , từ đó  $\widehat{SIH} = 90^\circ - \alpha = \beta$ .

Ta có  $HH' = IJ = JI \cdot \tan \beta = JI \cdot \cot \alpha$ .

$$\text{Mà } JI = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}(a-b).$$

$$\text{Vậy } HH' = \frac{\sqrt{3}}{6}(a-b)\cot \alpha,$$

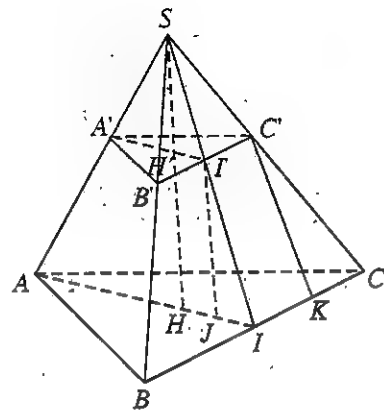
$$II' = \frac{JI}{\cos \beta} = \frac{JI}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin \alpha}$$

$$CC'^2 = C'K^2 + KC^2 = \left( \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin \alpha} \right)^2 + \left( \frac{a-b}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow CC' = \frac{a-b}{2\sqrt{3}\sin \alpha} \sqrt{1+3\sin^2 \alpha}.$$

$$\text{b) } S_{xq} = 3 \cdot \frac{1}{2}(B'C' + BC) \cdot II' = \frac{3}{2}(a+b) \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4\sin \alpha}(a^2 - b^2)$$

$$S_{tp} = \frac{\sqrt{3}}{4\sin \alpha}(a^2 - b^2) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{a^2 - b^2}{\sin \alpha} + a^2 + b^2 \right).$$



Hình 226

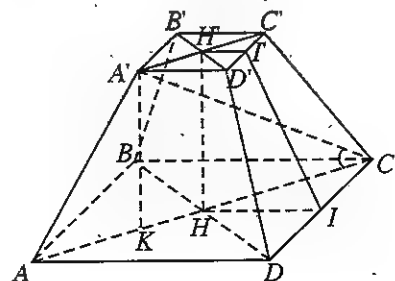
89. (h.227)

Gọi  $H, H'$  lần lượt là tâm của hai đáy  $ABCD, A'B'C'D'$ .  $I, I'$  lần lượt là trung điểm của  $CD, C'D'$  thì  $HH' = h$ ;

$$\widehat{A'CA} = \beta; \widehat{I'IH} = \alpha.$$

$$\text{a) Dễ thấy } II' = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Kí hiệu độ dài cạnh của các đáy  $ABCD, A'B'C'D'$  lần lượt là  $x, y$  ( $x > y$ ).



Hình 227

Ta có  $\frac{x-y}{2} = h \cot \alpha$

$$\Leftrightarrow x-y=2h \cot \alpha. \quad (1)$$

Kẻ  $A'K \parallel HH'$  thì  $A'K = HH' = h$  và

$$KC = A'K \cot \beta = h \cot \beta \text{ hay } x\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2} - y\sqrt{2}}{2} = h \cot \beta.$$

Từ đó  $\frac{(x+y)\sqrt{2}}{2} = h \cot \beta$

$$\Leftrightarrow x+y = \sqrt{2}h \cot \beta \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $x = \frac{h}{2}(\sqrt{2} \cot \beta + 2 \cot \alpha)$

$$y = \frac{h}{2}(\sqrt{2} \cot \beta - 2 \cot \alpha) \text{ (điều kiện } \sqrt{2} \cot \beta - 2 \cot \alpha > 0).$$

$$b) S_{xq} = 4 \cdot \frac{1}{2}(x+y)H' = 2\sqrt{2}h \cot \beta \cdot \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}h^2 \cot \beta}{\sin \alpha}.$$

### Bài tập trắc nghiệm chương III

- |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. (D).  | 2. (C).  | 3. (B).  | 4. (B).  | 5. (D).  |
| 6. (A).  | 7. (A).  | 8. (A).  | 9. (B).  | 10. (B). |
| 11. (B). | 12. (D). | 13. (C). | 14. (A). | 15. (D). |
| 16. (A). | 17. (A). | 18. (D). |          |          |

## **BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM**

---

### **A. ĐỀ BÀI**

1. Cho đường thẳng  $a$  và vectơ  $\vec{u}$  có giá vuông góc với  $a$ . Gọi  $F$  là phép hợp thành của đối xứng trục  $D_a$  và tịnh tiến  $T_{\vec{u}}$ . Với điểm  $M$  bất kì, gọi  $M' = F(M)$  và  $I$  là trung điểm của  $MM'$ .
  - a) Tìm quỹ tích của  $I$  khi  $M$  thay đổi.
  - b) Chứng minh rằng  $F$  là phép đối xứng trục.
2. Cho điểm  $O$  nằm trên đường thẳng  $a$ . Gọi  $D$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $a$ ,  $Q$  là phép quay tâm  $O$  góc quay  $\varphi$  và  $F$  là phép hợp thành của  $D$  và  $Q$ . Với điểm  $M$  bất kì, gọi  $M' = F(M)$  và  $I$  là trung điểm của  $MM'$ .
  - a) Tìm quỹ tích của  $I$  khi  $M$  thay đổi.
  - b) Chứng minh rằng  $F$  là phép đối xứng trục.
3. Cho đường tròn  $(O'; R)$  và một điểm  $A$  cố định, một điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn. Tìm quỹ tích các điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$ .
4. Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A, B$  cố định. Một điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn. Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $A$ , điểm  $M'$  đối xứng với  $N$  qua  $B$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M'$ .
5. Cho hai đường thẳng  $a, b$  cắt nhau và không vuông góc với nhau, điểm  $O$  không nằm trên chúng. Hãy xác định điểm  $A$  nằm trên  $a$  và điểm  $B$  nằm trên  $b$  sao cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại đỉnh  $O$ .
6. Cho ba điểm  $A, B, C$ . Gọi  $D_A, D_B, D_C$  là các phép đối xứng tâm có tâm lần lượt là  $A, B$  và  $C$ . Chứng minh rằng hợp thành của ba phép đối xứng tâm nói trên là một phép đối xứng tâm.
7. Cho năm điểm  $M, N, P, Q, R$ . Hãy xác định ngũ giác  $ABCDE$  sao cho  $M, N, P, Q, R$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE, EA$  của ngũ giác đó.

8. Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A, B$  cố định sao cho đường thẳng  $AB$  không cắt đường tròn. Một điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn.
- Tìm quỹ tích điểm  $N$  sao cho  $ABMN$  là hình bình hành.
  - Tìm quỹ tích trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABM$ .
9. Cho đường thẳng  $a$  và điểm  $G$  không nằm trên  $a$ . Với hai điểm phân biệt  $A, B$  thay đổi trên  $a$ , ta lấy điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tìm quỹ tích điểm  $C$ .
10. Cho phép vị tự  $V$  có tâm  $O$  tỉ số  $k$  và phép vị tự  $V'$  có tâm  $O'$  tỉ số  $k'$ , biết rằng  $O, O'$  là hai điểm phân biệt và  $kk' = 1$ . Chứng minh rằng hợp thành của  $V$  và  $V'$  là một phép tịnh tiến.
11. Cho hình chóp  $S.ABC$ . Các điểm  $K, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $CB$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $SC$  sao cho  $\frac{SM}{MC} = \frac{2}{3}$ .
- Tính tỉ số diện tích của hai tam giác  $ASC$  và  $AKM$ .
  - Mặt phẳng qua  $K$  và song song với hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  có qua điểm  $N$  hay không?
  - Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp( $KMN$ ).
  - Chứng minh rằng đường thẳng  $KN$  chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.
12. Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với  $M$  là trung điểm của  $CD$ .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MAA_1)$  và  $(BDD_1B_1)$ .
  - Dựng đường thẳng  $\Delta$  qua  $M$  cắt cả  $BD_1$  và  $AA_1$ .
  - Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là giao điểm của  $\Delta$  với  $BD_1$  và  $AA_1$ . Tính tỉ số  $\frac{MP}{MQ}$ .
  - Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp( $B, \Delta$ ).
13. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Qua các đỉnh  $A, B, C, D$  dựng các đường thẳng  $a, b, c, d$  tương ứng song song với nhau và không thuộc mp( $ABCD$ ). Trên mỗi đường thẳng  $a, b, c, d$  lần lượt lấy các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Chứng minh rằng :



- a) Nếu các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  không đồng phẳng thì đường thẳng nối trung điểm của  $A_1C_1$  và trung điểm của  $B_1D_1$  luôn đi qua một điểm cố định.
- b) Bốn điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  đồng phẳng khi và chỉ khi trung điểm của  $A_1C_1$  trùng với trung điểm của  $B_1D_1$ .
- c) Nếu bốn đường thẳng  $AC_1, BD_1, CA_1, DB_1$  đôi một cắt nhau thì  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  là một hình hộp.
14. Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không nằm trong một mặt phẳng.  $M$  là một điểm của cạnh  $AD$ ,  $N$  là một điểm chuyển động trên cạnh  $BE$  sao cho  $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BE}$ .
- a) Chứng minh rằng  $MN$  luôn song song với một mặt phẳng cố định.
- b) Tìm tập hợp trung điểm  $G$  của đoạn thẳng  $MN$ .
15. Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = 2a$ ,  $CD = a$ ,  $AD = 3a$ ;  $M$  là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng  $AD$ .
- a) Xác định vị trí điểm  $M$  để hai đường thẳng  $BM$  và  $CM$  vuông góc với nhau.
- b) Gọi  $S$  là điểm thuộc đường thẳng vuông góc với  $mp(ABC)$  kẻ từ điểm  $M$  sao cho  $SM = AM$ . Xét mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M$  và vuông góc với  $SA$ . Thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi  $(P)$  là hình gì? Tính diện tích thiết diện thu được theo  $a$  và  $x$ , ở đây  $x = AM$  ( $0 < x \leq 3a$ ).
16. Cho hai đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$  chéo nhau và vuông góc với nhau.  $(P)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $\Delta'$  và vuông góc với  $\Delta$ , gọi  $I$  là giao điểm của  $(P)$  và  $\Delta$ . Lấy điểm  $A$  cố định thuộc  $\Delta$  ( $A \neq I$ ). Hai điểm  $B, C$  thay đổi trên  $\Delta'$  sao cho  $mp(B, \Delta)$  vuông góc với  $mp(C, \Delta)$ . Gọi  $AA', BB', CC'$  là các đường cao của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:
- a)  $AB^2 + AC^2 - BC^2$  không đổi.
- b)  $A'B.A'C$  không đổi và trực tâm của tam giác  $ABC$  là điểm cố định.
- c) Các điểm  $B', C'$  thuộc một đường tròn cố định.
17. Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Xét hai tia  $At, Ct'$  cùng chiều và cùng vuông góc với  $mp(ABC)$ . Lấy điểm  $M$  thuộc  $At$ ,  $N$  thuộc  $Ct'$  ( $M \neq A, N \neq C$ ). Đặt  $AM = m$ ,  $CN = n$ .
- a) Tính góc giữa các mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(NBD)$  với mặt phẳng  $(ABCD)$ .

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(NBD)$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa  $a, b, m, n$  để hai mặt phẳng đó vuông góc.

c) Khi  $a = b$  và  $\text{mp}(MBD)$  vuông góc với  $\text{mp}(NBD)$ , hãy tính đường cao  $OI$  của tam giác  $MON$  (trong đó  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ), từ đó suy ra hai mặt phẳng  $(BMN)$  và  $(DMN)$  vuông góc với nhau.

18. Trong mặt phẳng  $(P)$  cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Điểm  $A$  cố định thuộc đường tròn, đường kính  $BC$  quay quanh  $O$ , ( $BC$  không trùng với  $OA$ ). Đặt  $\widehat{ABC} = \alpha$ . Điểm  $S$  nằm trong không gian sao cho  $SA$  vuông góc với  $(P)$  và  $SA = 2R$ .

a) Chứng minh rằng chân đường cao  $SH$  của tam giác  $SBC$  thuộc một đường tròn cố định.

b) Xác định  $\alpha$  để diện tích tam giác  $SBC$  đạt giá trị lớn nhất, hãy tính giá trị đó.

19. Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  cạnh đáy bằng  $a$ . Lấy điểm  $B_1$  thuộc  $BB'$ , điểm  $C_1$  thuộc  $CC'$ . Đặt  $BB_1 = x, CC_1 = y$ .

a) Tam giác  $AB_1C_1$  có thể vuông ở  $A$  được không? Tìm hệ thức liên hệ giữa  $a, x, y$  để  $AB_1C_1$  là tam giác vuông tại  $B_1$ .

b) Giả sử  $AB_1C_1$  là tam giác thường và  $B_1$  là trung điểm của  $BB'$ ,  $y = 2x$  và  $\alpha$  là góc giữa  $\text{mp}(ABC)$  và  $\text{mp}(AB_1C_1)$ . Hãy tính diện tích tam giác  $AB_1C_1$  và độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đã cho.

## B. ĐÁP ÁN

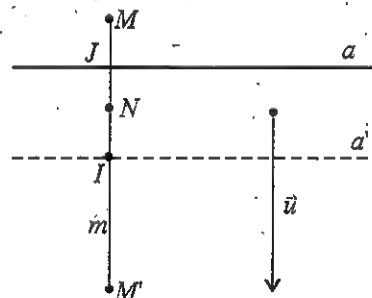
1. (h.228)

a) Nếu  $D_a$  biến điểm  $M$  thành điểm  $N$  thì  $T_{\vec{u}}$

biến điểm  $N$  thành điểm  $M'$  tức là  $\overrightarrow{NM'} = \vec{u}$ .

Vì vector  $\vec{u}$  có giá vuông góc với  $a$  nên ba điểm  $M, N$  và  $M'$  cùng nằm trên đường thẳng  $m$  vuông góc với  $a$ . Gọi  $J$  là trung điểm của  $MN$  thì  $J$  nằm trên  $a$  và ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{MN}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{NM'} = \frac{\vec{u}}{2}.\end{aligned}$$



Hình 228

Như vậy  $I$  là ảnh của  $J$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\frac{\vec{u}}{2}$ , suy ra quỹ tích  $I$  là đường thẳng  $a'$  ảnh của  $a$  qua phép tịnh tiến đó.

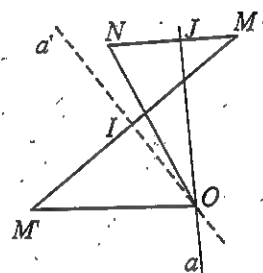
b) Từ câu a), ta suy ra  $a'$  là trung trực của đoạn thẳng  $MM'$ . Suy ra  $F$  là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng  $a'$ .

2. (h.229)

a) Nếu  $D$  biến điểm  $M$  thành điểm  $N$  thì  $Q$  biến điểm  $N$  thành điểm  $M'$ . Gọi  $J$  là trung điểm  $MN$  thì  $J$  nằm trên  $a$  và  $OJ$  là phân giác của góc  $MON$ .

Ta có

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI}) &= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OJ}) \\&= \frac{1}{2} [(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})] \\&= \frac{1}{2} (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$



Hình 229

Như vậy nếu gọi  $Q'$  là phép quay tâm  $O$  góc quay  $\frac{\varphi}{2}$  thì  $Q$  biến đường thẳng  $OJ$  (tức là đường thẳng  $a$ ) thành đường thẳng  $OI$ . Vậy quỹ tích của  $I$  là đường thẳng  $a'$ , ảnh của  $a$  qua phép quay  $Q'$ .

b) Từ câu a) ta suy ra  $a'$  là trung trực của đoạn thẳng  $MM'$ . Suy ra  $F$  là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng  $a'$ .

3. Từ  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$  suy ra  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}$ . Gọi  $T$  là phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{OA}$  thì  $T$  biến  $M$  thành  $N$ . Vậy quỹ tích các điểm  $N$  là ảnh của đường tròn  $(O; R)$  qua phép tịnh tiến  $T$ , đó là đường tròn tâm  $A$  bán kính  $R$ .

4. *Hướng dẫn.* Chứng minh  $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ . Quỹ tích các điểm  $M'$  là đường tròn ảnh của đường tròn  $(O; R)$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $2\overrightarrow{AB}$ .

5. (h.230) Giả sử đã xác định được hai điểm  $A, B$  theo yêu cầu của bài toán.

Vì  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  nên góc lượng giác  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Xét trường hợp  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$ .

Gọi  $Q$  là phép quay tâm  $O$  với góc quay

$\frac{\pi}{2}$  và  $a'$  là ảnh của đường thẳng  $a$  qua

phép  $Q$ . Vì  $Q$  biến điểm  $A$  thành điểm  $B$  nên  $B$  cũng nằm trên đường thẳng  $a'$ , nói cách khác  $B$  là giao điểm của  $a'$  và  $b$ .

Vậy ta có cách xác định điểm  $B$  như sau : Xác định đường thẳng  $a'$  là ảnh của đường thẳng  $a$  qua phép quay  $Q$  rồi lấy giao điểm  $B$  của  $a'$  và  $b$ . (Chú ý rằng  $a'$  vuông góc với  $a$  còn  $b$  không vuông góc với  $a$  nên  $a'$  và  $b$  cắt nhau). Để xác định điểm  $A$  ta vẽ đường thẳng  $c$  đi qua  $O$  và vuông góc với  $OB$  thì  $c$  sẽ cắt  $a$  tại  $A$ . Vậy  $OAB$  là tam giác vuông cân cần tìm.

Đối với trường hợp  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$  ta cũng làm tương tự và được tam giác vuông cân  $OA'B'$  với  $A'$  nằm trên  $a$  và  $B'$  nằm trên  $b$ .

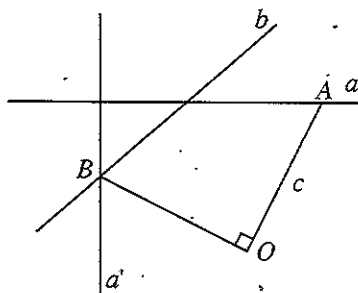
Bài toán có hai nghiệm hình.

6. (h.231) Gọi  $F$  là phép hợp thành của ba phép đối xứng  $D_A, D_B$  và  $D_C$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì sao cho  $M_1 = D_A(M)$ ,  $M_2 = D_B(M_1)$ ,  $M' = D_C(M_2)$ , có nghĩa là các điểm  $A, B, C$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $MM_1, M_1M_2, M_2M'$ .

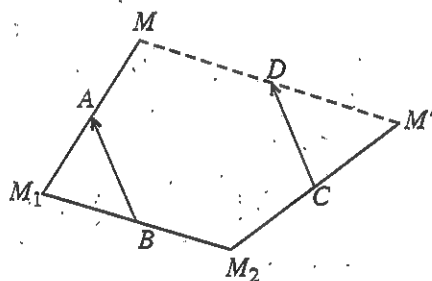
Từ đó nếu ta gọi  $D$  là trung điểm của

đoạn thẳng  $MM'$  thì  $\overline{CD} = \overline{BA}$ , tức  $D$

là điểm xác định không phụ thuộc vào  $M$ . Theo định nghĩa của phép hợp thành  $F$  thì  $F$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$ . Vì  $D$  là trung điểm của  $MM'$  nên  $F$  là phép đối xứng tâm với tâm là  $D$ .

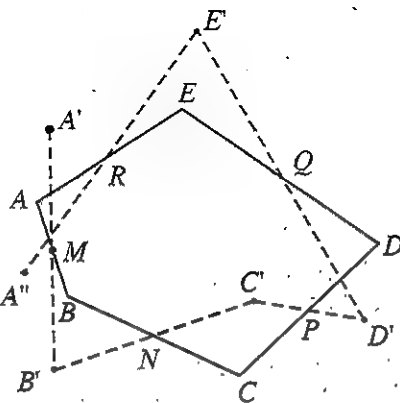


Hình.230



Hình 231

7. (h.232) Giả sử đã xác định được ngũ giác  $ABCDE$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Lấy một điểm  $A'$  bất kì, và xác định các điểm  $B', C', D', E', A''$  như sau :  $B'$  là điểm đối xứng của  $A'$  qua  $M$ ,  $C'$  là điểm đối xứng của  $B'$  qua  $N$ ,  $D'$  là điểm đối xứng của  $C'$  qua  $P$ ,  $E'$  là điểm đối xứng của  $D'$  qua  $Q$ , và  $A''$  là điểm đối xứng của  $E'$  qua  $R$ .



Hình 232

Theo các tính chất của phép đối xứng tâm ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= -\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \\ &= -\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'} = -\overrightarrow{AA''}.\end{aligned}$$

Suy ra  $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA''}$ , do đó  $A$  là trung điểm của đoạn thẳng  $A'A''$ .

Từ đó suy ra cách dựng: Lấy điểm  $A'$  tùy ý rồi dựng các điểm  $B', C', D', E', A''$  như trên. Dựng  $A$  là trung điểm của đoạn thẳng  $A'A''$ . Có điểm  $A$  ta dễ dàng dựng được các điểm  $B, C, D$  và  $E$ .

8. a) Vì tứ giác  $ABMN$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$ . Vậy phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{BA}$  biến điểm  $M$  thành điểm  $N$ . Suy ra quỹ tích các điểm  $N$  là ảnh của đường tròn  $(O; R)$  qua phép tịnh tiến đó.

b) Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$  thì  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ . Vậy phép vị tự  $V_{\left(I, \frac{1}{3}\right)}$  biến điểm

$M$  thành điểm  $G$ . Từ đó suy ra quỹ tích các điểm  $G$  là đường tròn ảnh của đường tròn  $(O; R)$  qua phép vị tự nói trên.

9. *Hướng dẫn.* Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$  thì phép vị tự  $V$  tâm  $G$  tỉ số  $-2$  biến  $M$  thành  $C$ . Vì  $M$  di chuyển trên  $a$  nên quỹ tích của  $C$  là ảnh của  $a$  qua phép vị tự  $V$ .

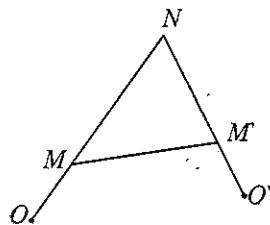
10. (h.233) Lấy điểm  $M$  tùy ý và giả sử  $V$  biến điểm  $M$  thành điểm  $N$  và  $V'$  biến điểm  $N$  thành điểm  $M'$ .

Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'N}.$$

Suy ra (với chú ý rằng  $kk' = 1$ )

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'O'} \\ &= \frac{1}{k}\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{MM'} - k'\overrightarrow{O'N} \\ &= \overrightarrow{MM'} + \frac{1}{k}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NO'}) = \overrightarrow{MM'} + \frac{1}{k}\overrightarrow{OO'}. \end{aligned}$$



Hình 233

Như vậy, ta có  $\overrightarrow{MM'} = (1 - k')\overrightarrow{OO'}$ . (\*)

Vì phép hợp thành của  $V$  và  $V'$  biến  $M$  thành  $M'$  nên từ (\*) ta suy ra phép hợp thành đó là phép tịnh tiến theo vector  $(1 - k')\overrightarrow{OO'}$ .

11. (h.234)

a) Từ  $C$  và  $M$  ta lần lượt kẻ các đường  $CH$ ,  $MH'$  cùng vuông góc với  $SA$  ( $H, H'$  cùng thuộc  $SA$ ).

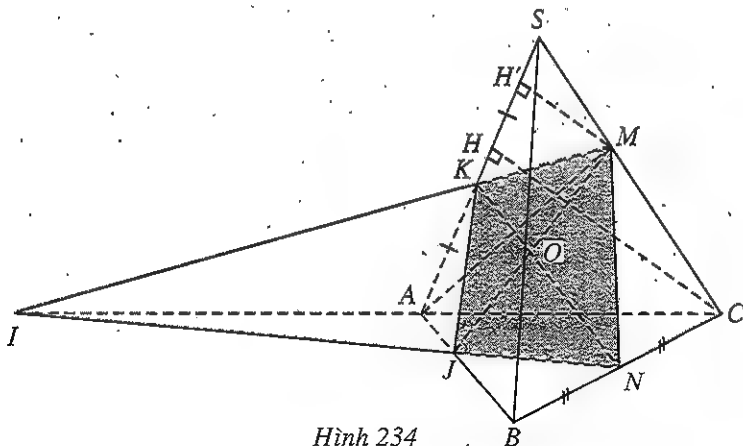
$$\text{Ta có } \frac{S_{ASC}}{S_{AKM}} = \frac{\frac{1}{2}SA \cdot CH}{\frac{1}{2}AK \cdot MH'} = 2 \cdot \frac{CH}{MH'} = 2 \cdot \frac{SC}{SM} = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5.$$

b) Gọi :

( $P$ ) là mặt phẳng qua  $K$ , song song với  $AB$  và  $SC$  ;

( $Q$ ) là mặt phẳng qua  $AB$  và song song với  $SC$  ;

( $R$ ) là mặt phẳng qua  $SC$  và song song với  $AB$ .



Hình 234

Khi đó ba mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$ ,  $(R)$  đôi một song song.

Gọi  $N' = BC \cap (P)$ . Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{CN'}{N'B} = \frac{SK}{KA} = 1 \Rightarrow CN' = N'B$$

do đó  $N'$  là trung điểm của  $BC$ , tức  $N' \equiv N$ .

Vậy mp $(P)$  qua điểm  $N$ .

c) Kéo dài  $MK$  cắt  $AC$  tại  $I$ ; nối  $IN$  cắt  $BA$  tại  $J$ . Vậy tứ giác  $MNJK$  là thiết diện cần tìm.

d) Gọi  $O$  là giao điểm của  $KN$  và  $MJ$  thì  $O$  là giao điểm của mp $(P)$  với  $JM$ . Ba mặt phẳng song song  $(R)$ ,  $(P)$ ,  $(Q)$  lần lượt cắt  $SA$  và  $MJ$  tại các điểm  $S$ ,  $K$ ,  $A$  và  $M$ ,  $O$ ,  $J$ . Theo định lí Ta-lét, ta có  $O$  là trung điểm của  $MJ$  (do  $K$  là trung điểm của  $SA$ ). Từ đó, dễ thấy

$$S_{KOM} = S_{KOJ}; S_{NMO} = S_{NOJ}.$$

Vậy  $S_{MKN} = S_{JKN}$  tức là đường thẳng  $KN$  chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

## 12. (h.235).

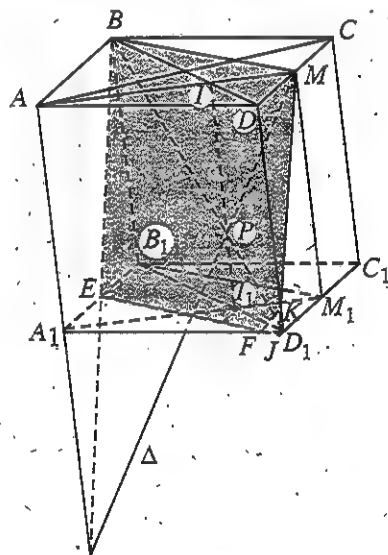
a) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $BD$ ,  $M_1$  là trung điểm của  $C_1D_1$ ,  $I_1$  là giao điểm của  $A_1M_1$  với  $B_1D_1$ . Dễ thấy  $II_1$  chính là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MAA_1)$  và  $(BDD_1B_1)$ .

b) Giả sử đường thẳng  $\Delta$  cần tìm cắt  $BD_1$  và  $AA_1$  lần lượt tại  $P$  và  $Q$ . Khi đó  $P$  chính là giao điểm của  $BD_1$  với mp $(MAA_1)$ . Vậy  $P$  là giao điểm của  $BD_1$  và  $II_1$ . Từ đó, suy ra cách dựng đường thẳng  $\Delta$  như sau :

– Lấy giao điểm  $P$  của  $BD_1$  và  $II_1$ .

– Vẽ đường thẳng  $MP$ .

Khi đó, đường thẳng  $MP$  chính là đường thẳng  $\Delta$  cần tìm.



Q Hình 235

c) Ta có  $DM \parallel AB \Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{MD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2}$

và  $IP \parallel AQ \Rightarrow \frac{MP}{PQ} = \frac{MI}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MP}{PQ} = \frac{1}{2}$

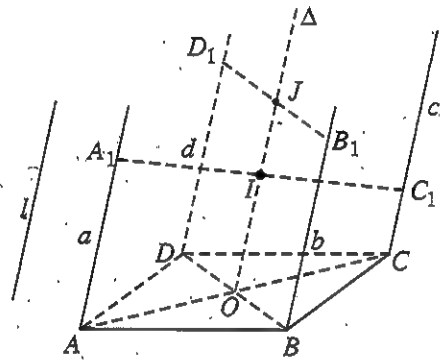
Suy ra  $\frac{MP}{MP + PQ} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{3}$

d) Nối  $B$  với  $Q$  cắt  $A_1B_1$  tại  $E$ . Từ  $E$  kẻ  $EF \parallel B_1M_1$  cắt  $A_1D_1$  tại  $F$ . Gọi  $J$  là giao điểm của  $EF$  với  $C_1D_1$ . Nối  $J$  với  $M$  cắt  $DD_1$  tại  $K$ .

Vậy thiết diện là ngũ giác  $BEFKM$ .

13. a) (h.236)

Xét phép chiếu song song lên  $mp(ABCD)$  theo phương chiếu  $l \parallel a$ . Khi đó  $A_1C_1$  có hình chiếu là  $AC$  nên trung điểm  $I$  của  $A_1C_1$  có hình chiếu là trung điểm  $O$  của  $AC$ . Tương tự, trung điểm  $J$  của  $B_1D_1$  có hình chiếu là trung điểm  $O$  của  $BD$ . Do đó, ba điểm  $I, J, O$  phải nằm trên một đường thẳng  $\Delta$ . Đường thẳng  $\Delta$  này đi qua điểm cố định  $O$ .



Hình 236

b) • Nếu  $A_1, B_1, C_1, D_1$  đồng phẳng thì  $A_1B_1 \parallel C_1D_1$  vì chúng là giao tuyến của  $mp(A_1B_1C_1D_1)$  với hai mặt phẳng song song  $(ABB_1A_1), (DCC_1D_1)$ .

Tương tự, ta có  $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ . Vậy tứ giác  $A_1B_1C_1D_1$  là một hình bình hành. Do đó trung điểm  $I$  của  $A_1C_1$  trùng với trung điểm  $J$  của  $B_1D_1$ .

• Ngược lại, nếu  $I$  trùng với  $J$  thì các điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1$  cùng nằm trên mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau  $A_1C_1$  và  $B_1D_1$ .



c) (h.237)

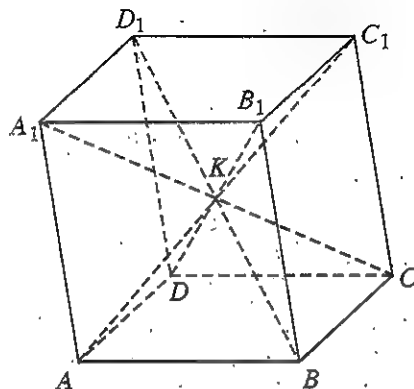
Giả sử  $AC_1$  cắt  $BD_1$  tại  $K$ . Khi đó, ta có

$$mp(AC_1, BD_1) \equiv mp(ABC_1D_1).$$

Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song  $(ABB_1A_1)$ ,  $(DCC_1D_1)$  theo hai giao tuyến song song  $AB$  và  $C_1D_1$ , suy ra  $C_1D_1 \parallel CD$ . Mặt khác  $DD_1 \parallel CC_1$ .

Vậy tứ giác  $CDD_1C_1$  là hình bình hành. Do đó

$$CD = C_1D_1 \Rightarrow C_1D_1 = BA.$$



Hình 237

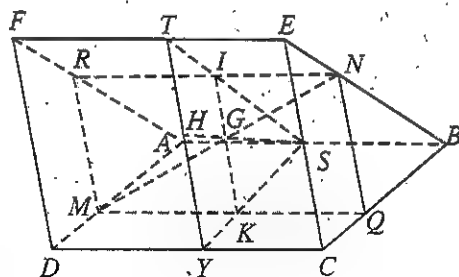
Như vậy  $ABC_1D_1$  là hình bình hành và  $K$  là trung điểm của  $AC_1$  và  $BD_1$ .

Tương tự, nếu  $BD_1$  cắt  $CA_1$  tại  $K'$  thì  $BCD_1A_1$  là hình bình hành và  $K'$  là trung điểm của  $BD_1$  và  $CA_1$  nên  $K' \equiv K$ .

Tương tự, ta cũng suy ra  $K$  là trung điểm của  $B_1D$ , các mặt  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$  đều là hình bình hành và từ đó  $A_1B_1C_1D_1$  cũng là hình bình hành. Vậy  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  là hình hộp.

#### 14. (h.238)

a) Kẻ  $MQ \parallel AB$  ( $Q \in BC$ ), kẻ  $NR \parallel AB$  ( $R \in AF$ ). Dễ thấy tứ giác  $MQNR$  là hình bình hành có các cạnh lần lượt song song với  $AB$  và  $EC$ . Từ đó suy ra  $MN$  luôn song song với mặt phẳng cố định  $(CDFE)$ .



Hình 238

b) Gọi  $S, T, Y$  lần lượt là trung điểm của  $AB, EF, CD$ ;  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $NR$  và  $QM$ . Khi đó, dễ thấy  $G$  là trung điểm của  $IK$  và  $I, K$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $NR$  và  $ST, MQ$  và  $SY$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của  $TY$ , thì rõ ràng  $S, G, H$  thẳng hàng và  $SH$  là đường trung tuyến của tam giác cố định  $STY$ . Vậy tập hợp các điểm  $G$  là đường trung tuyến  $SH$  của tam giác  $STY$ .

Hướng dẫn phân đảo. Lấy một điểm  $G$  bất kì trên đoạn thẳng  $SH$ , qua  $G$  kẻ đường thẳng  $IK \parallel TY$  ( $I \in ST, K \in SY$ ). Qua  $I$  và  $K$  lần lượt kẻ các đường thẳng  $NR$  và  $MQ$  cùng song song với  $AB$  ( $N \in EB, R \in AF, M \in AD, Q \in BC$ ).

Sau đó chứng minh  $G$  là trung điểm của  $MN$  và  $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BE}$ .

15. (h.239)

a) Đặt  $AM = x$  thì  $DM = 3a - x$ . Dễ thấy  $BC = a\sqrt{10}$ .

$$MB^2 = 4a^2 + x^2$$

$$MC^2 = a^2 + (3a - x)^2.$$

Hai đường thẳng  $BM$  và  $CM$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$BC^2 = MB^2 + MC^2$$

$$\Leftrightarrow 10a^2 = 2x^2 + 14a^2 - 6ax$$

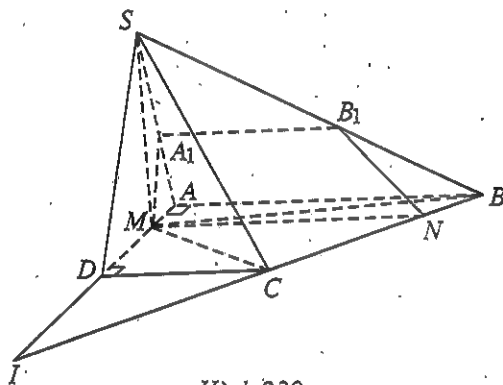
$$\Leftrightarrow x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = a, x = 2a.$$

Vậy có hai vị trí của điểm  $M$  để  $MB$  và  $MC$  vuông góc với nhau.

b) Vì  $SM \perp (ABCD)$ ,  $AB \perp MA$  nên  $AB \perp SA$  (định lý ba đường vuông góc). Mặt khác  $(P) \perp SA$  nên  $(P) \parallel AB$ .

Do  $MA = MS$ ,  $(P)$  đi qua  $M$  và  $(P) \perp SA$  nên  $(P)$  cắt  $SA$  tại trung điểm  $A_1$  của  $SA$ . Từ đó  $(P)$  cắt  $(SAB)$  theo giao tuyến  $A_1B_1$  với  $A_1B_1 \parallel AB$ ;  $(P)$  cắt  $(ABCD)$  theo giao tuyến  $MN$  song song với  $AB$ . Như vậy, thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi mp  $(P)$  là hình thang vuông  $MA_1B_1N$  (tứ giác  $MA_1B_1N$  là hình thang vuông, vì  $MN \parallel A_1B_1$ , ngoài ra  $AB \perp (SAD)$  nên  $A_1B_1 \perp (SAD)$ , tức là  $A_1B_1 \perp MA_1$ ).



Hình 239

$$A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = a, \quad A_1M = \frac{1}{2}SA = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{6a - x}{6a}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{6a - x}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S_{MA_1B_1N} &= \frac{1}{2} \left( a + \frac{6a-x}{3} \right) \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(9a-x)x}{12} \quad (\text{với } 0 < x \leq 3a). \end{aligned}$$

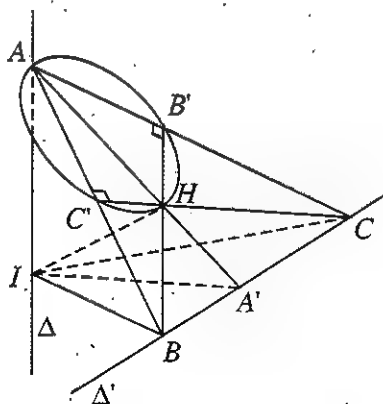
Ta có  $AI \perp (IBC)$  nên  $\widehat{BIC}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{BIC}$  là góc giữa mp( $B, \Delta$ ) và mp( $C, \Delta$ ). Theo giả thiết mp( $B, \Delta$ )  $\perp$  mp( $C, \Delta$ ) nên  $\widehat{BIC} = 90^\circ$ . Như vậy tứ diện  $IABC$  có  $IA, IB, IC$  đôi một vuông góc.

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = AI^2 + IB^2 + AI^2 + IC^2 - BC^2 = 2AI^2.$$

b) Dễ thấy  $IA'$  là đường cao của tam giác vuông  $IBC$ . Vậy

$A'B.A'C = IA'^2$ . Vì  $IA' \perp \Delta'$  nên  $IA'$  là cố định, do đó  $A'B.A'C$  không đổi.

Vì  $IABC$  là tứ diện có các cạnh  $IA, IB, IC$  đôi một vuông góc nên trục tâm của tam giác  $ABC$  là hình chiếu  $H$  của điểm  $I$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  (trùng với mặt phẳng  $(A, \Delta')$ ). Vậy trục tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  là điểm cố định.



Hình 240

c) Ta có  $B', C'$  thuộc  $mp(A, \Delta')$ .

$$\widehat{AB'H} = \widehat{AC'H} = 90^\circ.$$

Vậy  $B', C'$  thuộc đường tròn đường kính  $AH$  trong  $mp(A, \Delta')$ . Đường tròn này cố định.

17. (h.241)

a) Kẻ  $AH \perp BD$ . Do  $MA \perp (ABCD)$  nên  $MH \perp BD$  (định lí ba đường vuông góc).

Ta có  $MAH$  là tam giác vuông tại  $A$  nên  $\widehat{MHA}$  là góc giữa  $mp(MBD)$  với  $mp(ABCD)$ . Đặt  $\widehat{MHA} = \alpha$  thì

$$\tan \alpha = \frac{MA}{AH}, MA = m,$$

$$AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng  $(MBD)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  là  $\alpha$  mà

$$\tan \alpha = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

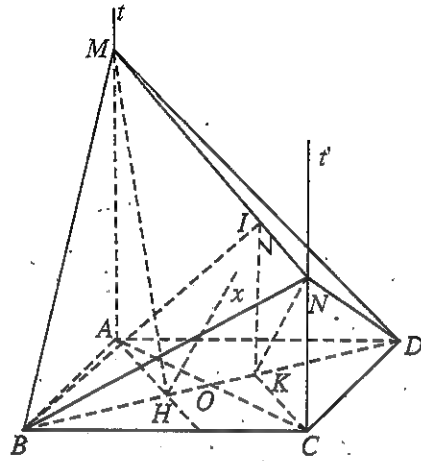
Tương tự, ta có  $\widehat{NKC}$  là góc giữa  $mp(NBD)$  với  $mp(ABCD)$  và đặt  $\widehat{NKC} = \beta$  thì

$$\tan \beta = \frac{n\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng  $(NBD)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  là  $\beta$  mà

$$\tan \beta = \frac{n\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

b) Kẻ  $Hx$  song song với  $KN$ , do  $AH \parallel KC$  và  $At, Ct'$  nằm về một phía của  $(ABCD)$  nên  $\widehat{MHx}$  hoặc  $180^\circ - \widehat{MHx}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(MBD)$  và  $(NBD)$ .



Hình 241

Đặt  $\widehat{MHx} = \gamma$  thì  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$$\tan \gamma = -\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(m+n)ab}{mn(a^2 + b^2) - a^2b^2}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD) là  $\varphi$  mà

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(m+n)ab}{|mn(a^2 + b^2) - a^2b^2|}$$

Từ đó, suy ra mặt phẳng (MBD) và mặt phẳng (NBD) vuông góc khi và chỉ

khi  $mn(a^2 + b^2) - a^2b^2 = 0$  hay  $mn = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ .

c) Khi  $a = b$  thì  $H \equiv K \equiv O$  và  $\text{mp}(MBD) \perp \text{mp}(NBD)$  tức là  $mn = \frac{a^2}{2}$ .

Gọi  $OI$  là đường cao của tam giác vuông  $OMN$  (h.242).

Ta có  $OI = \frac{2S_{MON}}{MN}$

$$2S_{MON} = 2[S_{ACNM} - (S_{AMO} + S_{CNO})]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}(m+n)a\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot m - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot n\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}(m+n).$$

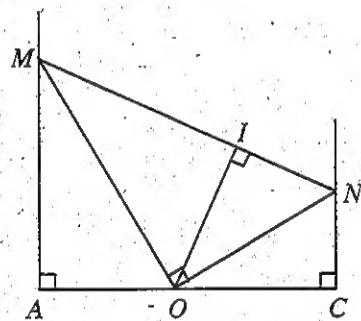
$$MN = \sqrt{(m-n)^2 + 2a^2} = \sqrt{(m-n)^2 + 4mn} = m+n.$$

Từ đó  $OI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Vậy  $BID$  là tam giác vuông tại  $I$ .

Mặt khác  $BD \perp (MACN)$  nên  $BD \perp MN$ ; kết hợp với  $OI \perp MN$  ta có  $MN \perp (BID)$ .

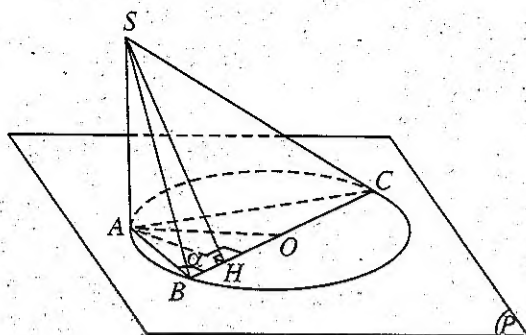
Vì  $\widehat{BID} = 90^\circ$  nên hai mặt phẳng (BMN) và (DMN) vuông góc với nhau.



Hình 242

18. (h.243)

a) Vì  $SA \perp (P)$  và  $SH \perp BC$  nên  $AH \perp BC$  (định lý ba đường vuông góc) hay  $\widehat{AHO} = 90^\circ$ . Như vậy  $H$  thuộc đường tròn đường kính  $AO$  trong mp( $P$ ). Đường tròn này cố định.



Hình 243

b)  $S_{SBC} = \frac{1}{2}BC.SH = R.SH.$

Do đó  $S_{SBC}$  lớn nhất khi và chỉ khi  $SH$  lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi  $AH$  lớn nhất, tức là  $H$  và  $O$  trùng nhau, khi đó  $\alpha = 45^\circ$ .

Khi  $\alpha = 45^\circ$  thì  $S_{SBC} = R \cdot \sqrt{4R^2 + R^2} = R^2\sqrt{5}.$

19. (h.244)

a) • Tam giác  $AB_1C_1$  vuông ở  $A$  khi và chỉ khi

$$B_1C_1^2 = AB_1^2 + AC_1^2.$$

Mặt khác

$$B_1C_1^2 = a^2 + (x - y)^2$$

$$AB_1^2 = a^2 + x^2$$

$$AC_1^2 = a^2 + y^2.$$

Do đó tam giác  $AB_1C_1$  vuông ở  $A$  khi và chỉ khi

$$a^2 + (x - y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2$$

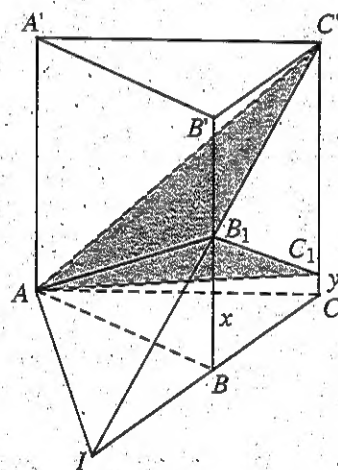
$$\Leftrightarrow 2xy = -a^2.$$

Điều này không xảy ra. Vậy tam giác  $AB_1C_1$  không thể vuông tại  $A$  được.

• Tam giác  $AB_1C_1$  vuông tại  $B_1$  khi và chỉ khi

$$AC_1^2 = AB_1^2 + B_1C_1^2 \Leftrightarrow a^2 + y^2 = a^2 + x^2 + a^2 + (x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 2x^2 + a^2.$$



Hình 244

Đó là hệ thức liên hệ giữa  $a, x, y$  để tam giác  $AB_1C_1$  vuông tại  $B_1$ .

b) Khi  $B_1$  là trung điểm của  $BB'$ ,  $y = 2x$  thì  $C_1$  trùng với  $C'$ .

Gọi  $I = BC \cap B_1C'$  thì  $AI = (AB_1C') \cap (ABC)$ .

Vì  $B_1B = \frac{1}{2}BB'$  nên  $BI = BC$ , từ đó ta có  $IAC$  là tam giác vuông tại  $A$ , tức là  $AC \perp AI$ .

Mặt khác,  $C'C \perp (ABC)$  nên  $AC' \perp AI$  (định lý ba đường vuông góc).

Như vậy  $\widehat{C'AC}$  là góc giữa  $mp(AB_1C')$  và  $mp(ABC)$ .

Theo giả thiết thì  $\widehat{C'AC} = \alpha$ .

Từ đó  $S_{ABC} = S_{AB_1C_1} \cos \alpha$

tức là  $S_{AB_1C_1} = \frac{S_{ABC}}{\cos \alpha}$ .

Như vậy  $S_{AB_1C_1} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$ .

Ta cũng có  $CC' = AC \tan \alpha = a \tan \alpha$ .

Vậy độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đã cho là  $a \tan \alpha$ .

## MỤC LỤC

	Đề bài	Lời giải - Hướng dẫn - Đáp số
Lời nói đầu	3	
<b>Chương I - PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG</b>		
§1, §2. Mở đầu về phép biến hình. Phép tịnh tiến và phép dời hình.	5	20
§3. Phép đối xứng trục	7	24
§4. Phép quay và phép đối xứng tâm	9	30
§5. Hai hình bằng nhau	12	36
§6, §7. Phép vị tự. Phép đồng dạng.	13	39
Bài tập ôn tập chương I	15	43
<b>Bài tập trắc nghiệm chương I</b>	17	49
<b>Chương II - ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG</b>		
§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng	50	68
§2. Hai đường thẳng song song	54	78
§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng	56	85
§4. Hai mặt phẳng song song	58	89
§5. Phép chiếu song song	61	99
Bài tập ôn tập chương II	63	104
<b>Bài tập trắc nghiệm chương II</b>	65	112
<b>Chương III - VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC</b>		
§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ	113	136
§2, §3, §4. Hai đường thẳng vuông góc. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc	116	150
§5. Khoảng cách	125	184
Bài tập ôn tập chương III	128	195
<b>Bài tập trắc nghiệm chương III</b>	131	220
<b>Bài tập ôn tập cuối năm</b>	221	224